ÜBER DIE INVARIANTEN LINEARER UND QUADRATISCHER BINÄRER DIFFERENTIALFORMEN UND IHRE ANWENDUNG AUF DIE DEFORMATION DER FLÄCHEN.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

VON DER

PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER

FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT ZU BERLIN

GENEHMIGT UND NEBST DEN BEIGEFÜGTEN THESEN ÖFFENTLICH ZU VERTEIDIGEN

AM 31. MAI 1899

VON

GERHARD HESSENBERG

AUS FRANKFURT AM MAIN.

OPPONENTEN:

HERR CAND. CHEM. **LUDWIG RICHARD.**

HERR DR. PHIL. **RICHARD FUCHS.**

HERR DR. PHIL. **RUDOLF ROTHE.**

Sonderabdruck aus Band 23 der Acta mathematica.

STOCKHOLM
GEDRUCKT IN DER CENTRAL-DRUCKEREI
1899.

MEINER MUTTER

UND

DEM ANDENKEN MEINES VATERS

GEWIDMET.

THESEN.

I. Die Definition des bestimmten Integrals sollte in der Darstellung der Integralrechnung der des unbestimmten vorausgehen.

II. Von den analytischen Hülfsmitteln der Flächentheorie sind die Theorie der quadratischen Differentialformen und die der orthogonalen Systeme von gleich hervorragender Bedeutung.

III. Die Algebra ist eine formale Wissenschaft.

IV. Die Annahme einer unteren Grenze für die Teilbarkeit der Materie enthält nichts undenkbares oder widersinniges.

V. Wesentlich an einer physikalischen oder chemischen Theorie ist die mathematische, unwesentlich die anschauliche Formulierung der Voraussetzungen.

VITA.

Natus sum *Gerhardus Guilelmus Hessenberg* Moenofrancofurti die XVI. mensis Augusti anni MDCCCLXXIV patre *Friderico Augusto,* quem praematura mihi ereptum morte valde lugeo, matre *Maria Julia* e gente *Lindheimer,* quam adhuc superstitem veneror. Fidei addictus sum evangelicae.

Primis litterarum elementis per tres annos in schola, quae dicitur: »Musterschule« eruditus, per novem annos gymnasium Francofurtanum, quod civitatis sumptibus sustinetur, frequentavi. Cuius scholae magistris, optime de me meritis, nec non rectori illustrissimo *Reinhardt* gratias ago quam maximas.

Maturitatis testimonium adeptus autumno anni XCII h. s. Universitatem Guilelmam Argentorati adii, ubi per bis senos menses studiis praecipue physicis, chemicis, mathematicis incubui. Docuerunt me viri celeberrimi: *Fittig, Gerland, F. Kohlrausch, Krazer, Reye, Ziegler.* Laboratorii viri celeberrimi *F. Kohlrausch* per bis senos menses, colloquii physici per sex menses sodalis fui.

Autumno anni XCIII h. s. in Universitatis Fridericae Guilelmae Berolinensis civium numerum receptus per sex menses studiis incubui praecipue physicis ac chemicis, deinde per septies senos menses mathematicis et physicis. Audivi viros doctissimos: *de Bezold, Biedermann, Frobenius, Fuchs, de Helmholtz* (†), *Hensel, Hettner, Knoblauch, Kötter, Paulsen, Planck, Pringsheim, Schlesinger, Schmoller, H. A. Schwarz, Stumpf, Wien,* nec non in schola polytechnica Berolinensi *G. Hauck.* Seminarii mathematici, cui praesunt viri celeberrimi *Fuchs, H. A. Schwarz, Frobenius,* per septies senos menses sodalis fui. Laboratoriis virorum celeberrimorum *Kundt* (†) et *Fischer* per sex menses, exercitationibus, quas vir celeberrimus *Planck* de rebus mathematico-physicis instituere solet, per quater senos menses, colloquiis viri celeberrimi *H. A. Schwarz* per bis senos menses interfui.

Omnibus his viris, qui Argentorati et Berolini me docuerunt, optime de me meritis, imprimis *Friderico Kohlrausch* et *Hermanno Amando Schwarz* summas gratias ago semperque habebo. *Societati* quoque *Mathematicae* Berolinensi, cuius autumno anni XCIV sodalis factus sum, permulta me debere confiteor summasque ago gratias.

ÜBER DIE INVARIANTEN LINEARER UND QUADRATISCHER BINÄRER DIFFERENTIALFORMEN UND IHRE ANWENDUNG AUF DIE DEFORMATION DER FLÄCHEN

VON

GERHARD HESSENBERG
in CHARLOTTENBURG—BERLIN.

In der vorliegenden Arbeit habe ich versucht, die Hauptformeln der allgemeinen Flächentheorie, unter specieller Beachtung des Biegungsproblems, einerseits in möglichst algebraischer und formal abgekürzter Weise, andererseits so herzuleiten, dass die Invarianz der für allgemeine Coordinaten gültigen Formeln unmittelbar in die Augen springt.

Zu diesem Zwecke ist zunächst durch Anwendung der Begriffe der Co- und Contragredienz das Nachrechnen von Transformationen vermieden. Sodann ist durch Einführung einer der Differentiation verwandten Operation, die ich cogrediente Differentiation nenne, erreicht worden, dass die cogredienten Differentiale irgend welcher Grössen bei Coordinatentransformationen dieselben Substitutionen erleiden, wie diese Grössen selbst.

Mit den in den ersten vier Abschnitten gewonnenen Hülfsmitteln ergeben sich im Abschnitt V die Eigenschaften der gebräuchlichen Differentialparameter. Abschnitt VII giebt einen Überblick über die vielgebrauchten orthogonalen Systeme, die von zwei Parametern abhängen. Sodann folgt im Abschnitt VIII die Herleitung der Differentialgleichung

$$\Delta_{22} z = K(1 - \Delta_1 z),$$

in IX die der Codazzischen Formeln und der Gaussischen Relation, in X die der Weingartenschen Differentialgleichung, aus der sich die bisher bekannten Classen aufeinander abwickelbarer Flächen bestimmen lassen.[1]

Im folgenden Abschnitt wird eine eigenartige Singularität der letztgenannten Differentialgleichung untersucht, auf die inzwischen auch Hr. WEINGARTEN selbst unter Bezugnahme auf vorliegende Arbeit aufmerksam gemacht hat.[2]

Unter Umständen liefert nämlich die in Rede stehende Differentialgleichung nicht alle Biegungen der gegebenen Fläche. Ich zeige, dass die Differentialgleichung auf unendlich viele Arten so aufgestellt werden kann, dass eine beliebig vorgeschriebene Biegung durch ihre Integration nicht gefunden wird. Andererseits lässt sich für jede Fläche diese Singularität vermeiden. Ich leite ferner das Kriterium für das Eintreten derselben mit Hülfe einer im Abschnitt VI geführten Untersuchung her und zeige, dass die Bestimmung der nicht gefundenen Biegungen auf eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung führt.

Im letzten Abschnitt sind einige specielle Beispiele hierzu untersucht.

Es sei mir an dieser Stelle gestattet, den Hrn. WEINGARTEN und KNOBLAUCH für ihr Interesse an der vorliegenden Arbeit und nützliche Ratschläge bei der Ausarbeitung meinen Dank auszusprechen.

I.

§ 1. In den nachfolgenden Untersuchungen bezeichnet abkürzungsweise $\xi, x, \xi_{(\iota)}$ oder $x_{(\iota)}$ das System der n Grössen $\xi_\lambda, x_\lambda, \xi_{\iota,\lambda}$ oder $x_{\iota,\lambda}$, $\lambda = 1, 2 \ldots n$. Von zwei Systemen, die mit entsprechenden Buchstaben des griechischen und lateinischen Alphabets bezeichnet sind, soll angenommen werden, dass sie *contragredient* sind, d. h., dass bei linearer Transformation des einen das andere die inverse und transponierte Substitution

[1] WEINGARTEN, *Mémoire sur la déformation des surfaces,* Preisschrift der Pariser-Akademie. Acta math. Bd. 20, p. 159 ff. Die Citate beziehen sich auf die Publication in den »Mémoires présentés par divers savants etc.» Bd. XXXII.

DARBOUX. *Théorie générale des surfaces.* Bd. IV, letztes Capitel.

RICCI. *Della equazione fondamentale di Weingarten.* Atti dell'Istituto Veneto dei scienze, lettere ed arti, T. VIII. S. VII. 1896—97.

[2] *Note zur Theorie der Deformation der Flächen.* Acta math. 22, pag. 193 ff.

erleidet. Damit die inverse Substitution existiert, darf natürlich die Substitutionsdeterminante nicht verschwinden.

Die Bedeutung des Begriffes der Contragredienz liegt in folgenden Sätzen, die aus der Theorie der linearen Transformationen bekannt sind:

I. *Sind die Systeme* ξ *und* x *contragredient, so ist der Ausdruck* $\sum\limits_\lambda \xi_\lambda x_\lambda$ *invariant.*

II. *Ist* $\sum x_\lambda \xi_\lambda$ *bei linearen Transformationen der* ξ_λ *invariant, und können die* ξ_λ n *Wertesysteme annehmen, deren Determinante nicht verschwindet, so sind die Systeme* ξ *und* x *contragredient.*

Der Ausdruck $\sum\limits_\lambda x_\lambda \xi_\lambda$ soll mit (x, ξ) bezeichnet werden.

Das Wort »*invariant*» gebrauche ich ausschliesslich im Sinne von »*absolut invariant*» und denke mir unter T eine Funktion, die die Eigenschaft besitzt, bei linearer Transformation der Variabeln ξ sich mit der Substitutionsdeterminante zu multiplicieren. Durch Multiplication mit einer Potenz von T kann jede Invariante im weiteren Sinne in eine absolute verwandelt werden. Über T wird an geeigneter Stelle verfügt werden.

Aus n cogredienten Systemen $\xi_{(i)}$ und n ihnen contragredienten $x_{(i)}$ bildet man die Invarianten $T|\xi_{i,\lambda}|$ und $T^{-1}|x_{i,\lambda}|$, $(i, \lambda = 1, 2, \ldots, n)$. Da sie lineare Formen jedes der Systeme sind, erhält man aus (II) den Satz:

III. *Bildet man aus* $(n-1)$ *den* ξ *cogredienten (bezw. contragredienten) Systemen die Determinanten* $(n-1)^{\text{ten}}$ *Grades, so ergeben diese (bei geeigneter Wahl der Vorzeichen) mit* T *(bezw.* T^{-1}*) multipliciert ein den* ξ *contragredientes (bezw. cogredientes) System.*

§ 2. ξ und ξ^* seien zwei Systeme von n bezw. m Variabeln; x und x^* seien ihnen contragredient. Erfahren ξ und ξ^* die Substitutionen

$$(1) \qquad \xi_\lambda = \sum_\rho s_{\lambda\rho}\xi'_\rho, \qquad \xi^*_\lambda = \sum_\rho s^*_{\lambda\rho}\xi^{*\prime}_\rho,$$

so ist

$$(1_a) \qquad x'_\rho = \sum_\lambda s_{\lambda\rho}x_\lambda, \qquad x^{*\prime}_\rho = \sum_\lambda s^*_{\lambda\rho}x^*_\lambda.$$

Das System der nm Grössen $\xi_\lambda\xi^*_\mu$ werde mit $\xi\xi^*$ bezeichnet.[1] Es wird linear transformiert durch

$$(2) \qquad \xi_\lambda\xi^*_\mu = \sum_{\rho,\sigma} s_{\lambda\rho}s^*_{\mu\sigma}\xi'_\rho\xi^{*\prime}_\sigma$$

---

[1] $\xi\xi^*$ ist im allgemeinen von $\xi^*\xi$ verschieden!

und das System xx^* durch

$$(2_a) \qquad x'_\rho x^{*\prime}_\sigma = \sum_{\lambda,\mu} s_{\lambda\rho} s^*_{\mu\sigma} x_\lambda x^*_\mu,$$

Die Determinanten von (2) und (2_a) haben nach einem Satz von KRONECKER[1] den Wert $|s_{\lambda\rho}|^m . |s^*_{\mu\sigma}|^n$, sind also nicht null. Daraus folgt:

IV. *Ist ξ zu x, ξ^* zu x^* contragredient, so ist auch $\xi\xi^*$ zu xx^* contragredient.*

Denn da die Determinante von (2) und (2_a) nicht null ist, ist (2_a) die inverse und transponierte Substitution von (2).

A bezeichne das Coefficientensystem der bilinearen Form

$$\sum a_{\lambda\mu} \xi_\lambda \xi^*_\mu,$$

$\mathfrak{E}$ speciell das der Grössen $e_{\lambda\mu}$, wo $e_{\lambda\mu}$ die Null oder Einheit bedeutet, jenachdem λ von μ verschieden oder gleich μ ist. Das System $\xi\xi^*$ kann nm Wertsysteme annehmen, deren Determinante nicht null ist, z. B. für $\xi_{\iota,\lambda} = \xi^*_{\iota,\lambda} = e_{\iota\lambda}$. Mithin ist A dem System $\xi\xi^*$ contragredient. Ist B das Coefficientensystem der Form

$$\sum \beta_{\lambda\mu} x_\lambda x^*_\mu,$$

so sind ebenso die $\beta_{\lambda\mu}$ den $x_\lambda x^*_\mu$ contragredient, also nach IV auch den $a_{\lambda\mu}$. Man erhält damit den Satz:

V. *Sind $\sum a_{\lambda\mu}\xi_\lambda\xi^*_\mu$ und $\sum \beta_{\lambda\mu} x_\lambda x^*_\mu$ zwei Contravarianten, so ist der Ausdruck $\sum\limits_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu}\beta_{\lambda\mu}$ invariant.*

Er werde künftig mit (A, B) bezeichnet, also consequenterweise die Formen selbst mit

$$(A, \xi\xi^*) \text{ und } (B, xx^*),$$

wonach auch

$$(3) \qquad (xx^*, \xi\xi^*) = (x, \xi)(x^*, \xi^*).$$

Ist $n = m$, so ist das System A quadratisch, und seine Determinante multipliciert sich mit den Substitutionsdeterminanten der ξ und ξ^*. Haben

[1] Siehe HENSEL, *Über die Darstellung der Determinante eines Systems, welches aus zwei andern componiert ist.* Acta mathematica, 14, pag. 317—319.

wir nur die zwei Sorten ξ und x von Variabeln, so giebt es drei Typen von Formen:

$$(A, \xi\eta), (B, xy), (\mathfrak{C}, x\eta)$$

mit den Invarianten

$$Da = T^{-2}|a_{\lambda\mu}|; \qquad D\beta = T^2|\beta_{\lambda\mu}|; \qquad D\mathfrak{c} = |\mathfrak{c}_{\lambda\mu}|.$$

Die Formen des Typus $\mathfrak{C}$ heissen Zwischenformen; zu ihnen gehört $\mathfrak{E}$. Als

$$\sum \mathfrak{e}_{\lambda\mu}\xi_\lambda y_\mu$$

aufgefasst ist sie zu $\mathfrak{C}$ contravariant und bildet mit $\mathfrak{C}$ die Invariante

$$(\mathfrak{E}, \mathfrak{C}) = \sum_{\lambda,\mu} \mathfrak{e}_{\lambda\mu}\mathfrak{c}_{\lambda\mu} = \sum_\lambda \mathfrak{c}_{\lambda\lambda},$$

die auch mit $M\mathfrak{C}$ bezeichnet werden soll.

§ 3. Betrachtet man $(A, \xi\xi^*)$ als lineare Form der ξ^*, so ergiebt sich der Satz:

VI. *Die Grössen* ${}^a x_\mu = \sum_\lambda a_{\lambda\mu}\xi_\lambda$ *sind den* ξ^* *contragredient.*

Setzt man sie daher in die Form B ein, so erhält man den neuen invarianten Ausdruck

$$(B, x\,.\,{}^a x) = \sum_{\lambda,\mu,\nu} \beta_{\lambda\mu}x_\lambda\,.\,a_{\nu\mu}\xi_\nu,$$

der eine Zwischenform mit den Coefficienten

$$\mathfrak{c}_{\lambda\nu} = \sum_\mu \beta_{\lambda\mu}a_{\nu\mu}$$

darstellt. Es ist

(4) $$M\mathfrak{C} = \sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu}\beta_{\lambda\mu} = (A, B).$$

Setzt man

$$a_{\lambda\mu} = -{}^*a_{\mu\lambda},$$

so wird

$$(A, \xi\xi^*) = -({}^*A, \xi^*\xi)$$

und nach der soeben eingeführten Bezeichnung

$$\sum_\mu a_{\lambda\mu}\xi^*_\mu = -{}^{*a}x^*_\lambda,$$

(5) $$(A, \xi\xi^*) = ({}^a x, \xi^*) = -({}^{*a}x^*, \xi).$$

Die analoge Bezeichnung soll auf die Contravarianten von A zunächst *nicht* angewandt werden.

Werden irgend welche cogredienten Systeme ξ, η oder A, B zu dem cogredienten System der Grössen $h\xi_\lambda + k\eta_\lambda$ oder $ha_{\lambda\mu} + kb_{\lambda\mu}$ vereinigt (vorausgesetzt, dass h und k Invarianten sind), so soll das neu entstandene System mit $h\xi + k\eta$ oder $hA + kB$ bezeichnet werden. Da die eingeführten Ausdrücke mit Ausnahme von Da in den auftretenden Systemen linear sind, ist

$$(6) \qquad \begin{cases} (hA + kB, \Gamma) = h(A, \Gamma) + k(B, \Gamma), \\ ({}^a(hx + ky), \zeta) = h({}^a x, \zeta) + k({}^a y, \zeta), \\ ({}^{ha + kb}x, \eta) \quad = h({}^a x, \eta) + k({}^b x, \eta). \end{cases}$$

II.

§ 4. Wenn n unabhängige Variable u_λ in irgend einer Weise durch n andere, ebenfalls unabhängige, u'_λ so ausgedrückt werden, dass weder zwischen den u_λ noch zwischen den u'_λ eine Beziehung entsteht, so werden die Differentiale du_λ durch die du'_λ *linear* ausgedrückt, und die Determinante der linearen Substitution der Differentiale verschwindet nicht identisch.

Für ein bestimmtes Wertesystem der u_λ können die du_λ beliebige Werte durchlaufen. Man kann daher beliebig viele von einander unabhängig variierende Systeme $d_1 u_\lambda, d_i u_\lambda$ von Differentialen annehmen. Denkt man sich z. B. die u_λ als Funktionen von mehreren Gruppen von je n unabhängigen Parametern, so erfüllen die in Bezug auf die einzelnen Gruppen gebildeten Differentialsysteme die gestellte Anforderung.

Bei dieser speciellen Annahme sind (unter Voraussetzung der Stetigkeit der zweiten Ableitungen) die in Bezug auf die einzelnen Gruppen von Parametern ausgeführten Differentiationen vertauschbar. Es sollen auch im folgenden durch das Zeichen d nur solche Differentiationen bezeichnet werden, für die das Gesetz der Vertauschbarkeit erfüllt ist. Die anderen Systeme von Differentialen zählen dann unter die allgemein zu betrachtenden Systeme, die den Differentialen cogredient sind.

§ 5. Nunmehr sei $(A, d_1 u d_2 u) = \sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu} d_1 u_\lambda d_2 u_\mu$ eine bilineare *symmetrische* Form der Differentiale. Ihre Determinante sei nicht identisch null, und für T werde eine zweite Wurzel aus derselben gewählt, so dass

$$Da = 1$$

wird.

Nun ist:

$$d_3(A, d_1 u d_2 u) = \Sigma a_{\lambda\mu} d_3 d_1 u_\lambda d_2 u_\mu + \Sigma a_{\lambda\mu} d_1 u_\lambda d_3 d_2 u_\mu + \Sigma d_3 a_{\lambda\mu} d_1 u_\lambda d_2 u_\mu$$

ein invarianter Ausdruck. Von den Summen der rechten Seite ist die erste symmetrisch in Bezug auf die Differentiationen d_1 und d_3. Bezeichnet man sie daher vorübergehend mit A_2, so ist die zweite gleich A_1. Setzt man noch S_3 für die dritte, so ist

$$d_3(A, d_1 u d_2 u) = A_1 + A_2 + S_3,$$

also

$$d_2(A, d_3 u d_1 u) = A_3 + A_1 + S_2$$

und

$$d_1(A, d_2 u d_3 u) = A_2 + A_3 + S_1.$$

Um die zweiten Differentiale $d_1 d_2 u_\lambda$ gesondert zu betrachten, löse man nach A_3 auf:

$$\frac{1}{2}\{d_1(A, d_2 u d_3 u) + d_2(A, d_3 u d_1 u) - d_3(A, d_1 u d_2 u)\}$$
$$= A_3 + \frac{1}{2}(S_1 + S_2 - S_3). \tag{7}$$

Das zweite Glied der rechten Seite ist eine trilineare Form der $d_\alpha u_\lambda$. Der Coefficient von $d_1 u_\rho d_2 u_\sigma d_3 u_\mu$ ist

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial a_{\rho\mu}}{\partial u_\sigma} + \frac{\partial a_{\sigma\mu}}{\partial u_\rho} - \frac{\partial a_{\rho\sigma}}{\partial u_\mu}\right] = \begin{bmatrix}\rho\sigma \\ \mu\end{bmatrix}$$

in Christoffels Bezeichnung. Dadurch wird die rechte Seite von (7) zu

$$\sum_\mu d_3 u_\mu \cdot \left\{\sum_\lambda a_{\lambda\mu} d_1 d_2 u_\lambda + \sum_{\rho,\sigma} \begin{bmatrix}\rho\sigma \\ \mu\end{bmatrix} d_1 u_\rho d_2 u_\sigma\right\}, \tag{8}$$

und da dieser Ausdruck wegen (7) invariant ist, sind die Coefficienten

der $d_3 u_\mu$ in ihm den Differentialen contragredient. Setzt man noch mit Christoffel

$$\begin{bmatrix} \rho\sigma \\ \mu \end{bmatrix} = \sum_\lambda a_{\lambda\mu} \begin{Bmatrix} \rho\sigma \\ \lambda \end{Bmatrix},$$

so wird aus (8)

$$(8') \qquad \sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} \left[d_2 d_1 u_\lambda + \sum_{\rho\sigma} \begin{Bmatrix} \rho\sigma \\ \lambda \end{Bmatrix} d_1 u_\rho d_2 u_\sigma \right] d_3 u_\mu .$$

Führt man die Abkürzungen

$$\sum_\sigma \begin{Bmatrix} \rho\sigma \\ \lambda \end{Bmatrix} d_i u_\sigma = \begin{Bmatrix} \rho \\ \lambda \end{Bmatrix}_i$$

und $d_i \zeta_\lambda + \sum_\lambda \begin{Bmatrix} \lambda \\ \rho \end{Bmatrix}_i \zeta_\rho = \delta_i \zeta_\lambda$ ein,

so wird der Ausdruck in der eckigen Klammer in (8′) zu

$$(9) \qquad \delta_2 d_1 u_\lambda = \delta_1 d_2 u_\lambda,$$

und diese Grössen sind infolge der Invarianz von (8′) *den* du_λ *cogredient.*

§ 6. Die Abkürzung δ bedeutet nicht, wie d, eine auf jede Grösse anwendbare Operation, sondern ist wie ein dem Buchstaben ζ beigefügter Index aufzufassen. $\delta\zeta_\lambda$ steht für $(\delta\zeta)_\lambda$, und das System $\delta\zeta$ ist aus dem System ζ gebildet. *Ferner soll die in* (9) *gebrauchte Bezeichnung* δ *nur unter dem Vorbehalt gelten, dass die* ζ_λ *den Differentialen* du_λ *cogredient sind.* Für andere Systeme von Grössen wird das Zeichen δ in anderem Sinne gebraucht werden. Es gilt dann folgende Verallgemeinerung des eben Bewiesenen:

VII. *Sind die Grössen* ζ_λ *den Differentialen* du_λ *cogredient, so gilt das gleiche von den Ausdrücken* $\delta\zeta_\lambda$.

Drückt man nämlich in dem invarianten Gebilde

$$d\sum_\lambda x_\lambda \zeta_\lambda = \sum_\lambda dx_\lambda \zeta_\lambda + \sum_\lambda x_\lambda d\zeta_\lambda$$

$d\zeta_\lambda$ durch $\delta\zeta_\lambda$ aus, so erhält man:

$$(10) \qquad d\sum_\lambda x_\lambda \zeta_\lambda = \sum_\lambda \delta x_\lambda \,.\, \zeta_\lambda + \sum_\lambda x_\lambda \,.\, \delta\zeta_\lambda,$$

wo

$$\delta x_\lambda = dx_\lambda - \sum_\rho \begin{Bmatrix}\lambda \\ \rho\end{Bmatrix} x_\rho$$

gesetzt ist. Wählt man für die ζ_λ Differentiale, so ist nach dem zuletzt bewiesenen die zweite Summe der rechten Seite in (10) für sich invariant, also auch die erste, d. h.:

VIII. *Sind die Grössen x_λ den Differentialen du_λ contragredient, so gilt das gleiche von den Grössen δx_λ.*

Hiernach ist aber $\Sigma \delta x_\lambda . \zeta_\lambda$ überhaupt invariant, damit auch $\Sigma x_\lambda \delta\zeta_\lambda$, woraus VII folgt. Ich will demgemäss die $\delta\zeta$ und δx als »*cogrediente Differentiale*« der ζ und x bezeichnen.

§ 7. Nachdem erst die Existenz cogredienter Differentiale erwiesen ist, kann man die Theorie derselben auf allgemeinster Grundlage aufbauen. Ich beschränke mich aber auf bilineare Formen.

Es mögen Grössen $\begin{Bmatrix}\rho \\ \lambda\end{Bmatrix}$ und $\begin{Bmatrix}\rho \\ \lambda\end{Bmatrix}^*$ von der Beschaffenheit existieren, dass die Differentialausdrücke

$$\delta\zeta_\lambda = d\zeta_\lambda + \sum_\rho \begin{Bmatrix}\rho \\ \lambda\end{Bmatrix} \zeta_\rho \quad \text{und} \quad \delta\zeta_\lambda^* = d\zeta_\lambda^* + \sum_\rho \begin{Bmatrix}\rho \\ \lambda\end{Bmatrix}^* \zeta_\rho^*$$

den ζ_λ bezw. ζ_λ^* cogredient seien. Setzt man dann, wie soeben geschehen,

$$d\Sigma x_\lambda \zeta_\lambda = \Sigma x_\lambda \delta\zeta_\lambda + \Sigma \zeta_\lambda \delta x_\lambda,$$

so findet man, dass die Ausdrücke

$$\delta x_\lambda = dx_\lambda - \sum_\rho \begin{Bmatrix}\lambda \\ \rho\end{Bmatrix} x_\rho$$

den x_λ cogredient sind. Das entsprechende gilt für die gesternten Grössen.

Nunmehr sind die Grössen

$$\zeta_\lambda \delta\zeta_\mu^* \quad \text{und} \quad \delta\zeta_\lambda . \zeta_\mu^*,$$

also auch

$$\zeta_\lambda \delta\zeta_\mu^* + \delta\zeta_\lambda \zeta_\mu^*$$

den $\zeta_\lambda \zeta_\mu$ cogredient. Sie seien mit $\partial(\zeta_\lambda \zeta_\mu^*)$ bezeichnet. Sie sind nach IV den ebenso gebildeten $\partial(x_\lambda x_\mu^*)$ contragredient.

Setzt man $\zeta_\lambda \zeta_\mu^* = \beta_{\lambda\mu}$, $x_\lambda x_\mu^* = a_{\lambda\mu}$, so wird:

$$\partial\beta_{\lambda\mu} = d\beta_{\lambda\mu} + \sum_\rho \begin{Bmatrix} \rho \\ \lambda \end{Bmatrix} \beta_{\rho\mu} + \sum_\rho \begin{Bmatrix} \rho \\ \mu \end{Bmatrix}^* \beta_{\lambda\rho},$$

$$\partial a_{\lambda\mu} = da_{\lambda\mu} - \sum_\rho \begin{Bmatrix} \lambda \\ \rho \end{Bmatrix} a_{\rho\mu} - \sum_\rho \begin{Bmatrix} \mu \\ \rho \end{Bmatrix}^* a_{\lambda\rho}.$$

Die Bezeichnung sei allgemein beibehalten für irgend welche den $\zeta_\lambda \zeta_\mu^*$ co- bezw. contragrediente Grössen. Dann ist identisch

$$\Sigma a_{\lambda\mu} \partial\beta_{\lambda\mu} + \Sigma \partial a_{\lambda\mu} \,.\, \beta_{\lambda\mu} = d\Sigma a_{\lambda\mu} \beta_{\lambda\mu},$$

also speciell

$$d\Sigma a_{\lambda\mu} \zeta_\lambda \zeta_\mu^* = \Sigma a_{\lambda\mu} \zeta_\lambda \partial\zeta_\mu^* + \Sigma a_{\lambda\mu} \partial\zeta_\lambda \,.\, \zeta_\mu^* + \Sigma \partial a_{\lambda\mu} \zeta_\lambda \zeta_\mu^*.$$

Da die beiden ersten Summen der rechten Seite nach Voraussetzung invariant sind, ist es auch die dritte, und man erhält daher den Satz:

IX. *Die Grössen $\partial a_{\lambda\mu}$ bezw. $\partial\beta_{\lambda\mu}$ sind den $a_{\lambda\mu}$ bezw. $\beta_{\lambda\mu}$ cogredient.*

§ 8. Es sei $\Sigma f_\lambda \xi_\lambda = 0$ irgend eine Identität, in der die ξ_λ unbestimmte Grössen sind. Dann ist auch $\Sigma f_\lambda \partial\xi_\lambda = 0$ und durch Differentiation der Identität folgt eine Gleichuug von der Form $\Sigma \partial f_\lambda \,.\, \xi_\lambda = 0$, so dass die Differentiation nach den ξ_λ einfach unterbleiben konnte.

Zum Beispiel folgt aus der Identität:

$$\sum_\mu {}^a z_\mu \zeta_\mu^* = \sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu} \zeta_\lambda \zeta_\mu^*$$

sofort:

$$\Sigma \partial^a z_\mu \zeta_\mu^* = \Sigma \partial a_{\lambda\mu} \zeta_\lambda \zeta_\mu^* + \Sigma a_{\lambda\mu} \partial\zeta_\lambda \zeta_\mu^*,$$

d. h.

$$\partial^a z_\mu = {}^{\partial a} z_\mu + {}^a \partial z_\mu,$$

wenn ${}^a\partial z_\mu$ aus den $\partial\zeta_\lambda$ ebenso gebildet ist, wie ${}^a z_\mu$ aus den ζ_λ.

Das Zeichen ∂ befolgt also, soweit diese Untersuchungen reichen, dieselben algebraischen Gesetze, wie das Zeichen d.

§ 9. In dem speciellen Fall, den wir betrachten, haben wir drei Typen von Formen, für die

$$\delta a_{\lambda\mu} = da_{\lambda\mu} - \sum_\rho \begin{Bmatrix}\lambda\\ \rho\end{Bmatrix} a_{\rho\mu} - \sum_\rho \begin{Bmatrix}\mu\\ \rho\end{Bmatrix} a_{\lambda\rho},$$

$$\delta\beta_{\lambda\mu} = d\beta_{\lambda\mu} + \sum_\rho \begin{Bmatrix}\rho\\ \lambda\end{Bmatrix} \beta_{\rho\mu} + \sum_\rho \begin{Bmatrix}\rho\\ \mu\end{Bmatrix} \beta_{\lambda\rho},$$

$$\delta c_{\lambda\mu} = dc_{\lambda\mu} + \sum_\rho \begin{Bmatrix}\rho\\ \lambda\end{Bmatrix} c_{\rho\mu} - \sum_\rho \begin{Bmatrix}\mu\\ \rho\end{Bmatrix} c_{\lambda\rho}$$

zu setzen ist.

Verstehen wir unter den $a_{\lambda\mu}$ wieder die Coefficienten der Form, aus der die Christoffelschen Ausdrücke gebildet sind, so ist nach § 5

$$d_3(A\,,\,d_1u\,d_2u) = (A\,,\,\delta_3d_1u\,d_2u) + (A\,,\,d_1u\,\delta_3d_2u)$$

also $\delta a_{\lambda\mu} = 0$, wie auch durch Ausrechnen der Christoffelschen Ausdrücke unmittelbar nachzuweisen ist. Es ist daher allgemein

$$d(A\,,\,\xi\eta) = (A\,,\,\delta\xi\eta) + (A\,,\,\xi\delta\eta)$$

und

$$\delta^a x_\mu = {}^a\delta x_\mu.$$

Die Gleichungen $\delta a_{\lambda\mu} = 0$ bestimmen zugleich die Christoffelschen Ausdrücke eindeutig, so dass allgemein geführte Untersuchungen durch die Annahmen

$$Da = 1\,,\ \delta a_{\lambda\mu} = 0$$

auf die specielle Form der $a_{\lambda\mu}$ bezogen werden.

III.

§ 10. Im Falle $n = 2$ folgt aus Satz IV:

Ist das System η zu ξ cogredient, so sind die Grössen

$$y_1 = -T\eta_2, \qquad y_2 = +T\eta_1$$

den ξ contragredient, und umgekehrt.

Es sollen daher mit entsprechenden Buchstaben des griechischen und lateinischen Alphabetes nur noch solche System ξ und x bezeichnet werden, zwischen denen die Relationen

(A) $$T\xi_\lambda = (-1)^l x_l$$

bestehen. Darin bedeutet λ, l eine Permutation von 1, 2.

Damit entstehen zugleich die Identitäten:

(11) $$x_1\eta_1 + x_2\eta_2 = T^{-1}(x_1y_2 - y_1x_2) = T(\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2) = -(\xi_1y_1 + \xi_2y_2),$$

(12) $$\Sigma a_{\lambda\mu}\xi_\lambda\eta_\mu = \Sigma \mathfrak{a}_{l\mu}x_\lambda\eta_\mu = \Sigma \alpha_{lm}x_l y_m,$$

wenn in (12)

(B) $$T\mathfrak{a}_{l\mu} = a_{\lambda\mu}(-1)^l;\quad T^2\alpha_{lm} = a_{\lambda\mu}(-1)^{l+m}$$

gesetzt ist. Aus (B) folgt sofort weiter:

(13) $$\sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu}\beta_{\lambda\mu} = \Sigma \alpha_{lm}b_{lm};$$

und ist umgekehrt

$$\beta_{\lambda\mu} = \xi_\lambda\eta_\mu,$$

so folgt auch

$$b_{lm} = x_l y_m.$$

Ferner wird:

(14) $$\frac{1}{2}(A, \boldsymbol{A}) = Da = D\mathfrak{a} = D\alpha, \qquad M\mathfrak{A} = T^{-1}(a_{12} - a_{21}) = T(\alpha_{12} - \alpha_{21}).$$

§ 11. Da zu jedem System von Grössen ein contragredientes gehört, kann folgende Freiheit der Bezeichnung festgesetzt werden:

Dient ein Buchstabe zur abkürzungsweisen Bezeichnung eines Systems, so darf er auch zur Bezeichnung der durch (A) *oder* (B) *damit verbundenen Systeme verwandt werden.*

Bedeutet A das System $a_{\lambda\mu}$, $\boldsymbol{B}$ das System $\beta_{\lambda\mu}$, so können demnach die aequivalenten Ausdrücke (13) mit

$$(A, B),\ (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}),\ (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \text{ etc.}$$

bezeichnet werdet.

Für (12) kann ebenso

$$(A\,,\,xy),\ (A\,,\,\xi y),\ (\mathfrak{A}\,,\,\xi\eta)\ \text{etc.}$$

geschrieben werden, für die vier aequivalenten Ausdrücke (11) sowohl

$$(x\,,\,y),\ (x\,,\,\eta)\ \text{wie}\ (\xi\,,\,y)\ \text{oder}\ (\xi\,,\,\eta).$$

Es wird sich zeigen, dass von den durch (B) verbundenen Systemen immer das mit lateinischen Buchstaben bezeichnete gegeben ist, ausgenommen $\mathfrak{C}$. Von zwei durch (A) verknüpften kann ξ oder x gegeben sein. Das andere ist dann von T abhängig und ändert sich, wenn über T anderweitig verfügt wird. Wird T durch P ersetzt, so ist für ξ zu schreiben $\frac{T}{P}\xi$, wenn x gegeben, dagegen für x $\frac{P}{T}x$, wenn ξ gegeben ist.

§ 12. Die Abkürzungen $(A\,,\,B)$, $(x\,,\,y)$ befolgen nachstehende Relationen:

$$(15)\qquad \begin{cases} (A\,,\,B) = (B\,,\,A); & (A\,,\,A) = 2\,Da; \\ (x\,,\,y) = -(y\,,\,x); & (x\,,\,x) = 0; \\ (A\,,\,xy) = -({}^{*}A\,,\,yx) = ({}^{a}x\,,\,y) = (x\,,\,{}^{*a}y). \end{cases}$$

Die Form $(A\,,\,{}^{b}xy)$ soll auch mit $(AB\,,\,xy)$ bezeichnet werden. Nach (15) ist dann:

$$(16)\qquad (B\,,\,x\,{}^{a}y) = ({}^{b}x\,,\,{}^{a}y) = ({}^{*ab}x\,,\,y) = ({}^{*}AB\,,\,xy).$$

In § 3, (4) war gezeigt, dass

$$(16')\qquad M({}^{*}AB) = (A\,,\,B)$$

ist. Aus der Vertauschbarkeit von A mit B und aus

$$(17)\qquad (A\,,\,B) = ({}^{*}A\,,\,{}^{*}B),\qquad {}^{**}A = A$$

ergiebt sich übrigens:

$$(16'')\qquad M({}^{*}AB) = M({}^{*}BA) = M(B\,{}^{*}A) = M(A\,{}^{*}B).$$

Nach dem Multiplicationstheorem der Determinanten besteht zwischen vier Systemen $p_{(i)}\,,\,x_{(i)}$ $(i = 1\,,\,2)$ die Identität:

$$(18)\qquad |(p_{(i)}\,,\,r_{(k)})| = (p_{(1)}\,,\,p_{(2)})(r_{(1)}\,,\,r_{(2)}),$$

wofür auch geschrieben werden kann:

(18′) $$(p_{(1)}, p_{(2)})(r, y) = (r, p_{(2)})(p_{(1)}, y) - (r, p_{(1)})(p_{(2)}, y).$$

Ist $(p_{(1)}, p_{(2)}) = 0$, so ist demnach

$$(p_{(1)}, x) = f . (p_{(2)}, x),$$

wo f von x unabhängig ist.

So ergiebt sich aus $({}^a x, y) = -(x, {}^{*a} y)$, wenn x für y gesetzt wird:

$$({}^a x + {}^{*a} x, x) = 0,$$

d. h. nach dem eben bewiesenen:

$$({}^a x, y) + ({}^{*a} x, y) = f . (x, y).$$

f ist von y und aus Symmetriegründen auch von x unabhängig. Durch einfaches Ausrechnen erkennt man $f = MA$ und mithin

(19) $$(A, xy) - (A, yx) = MA(x, y).$$

Nach (3) und (18) ist daher speciell

(20) $$M(pq) = (p, q)$$

und andererseits nach (16), wenn in (19) ${}^* AB$ für A gesetzt wird,

(21) $$({}^a x, {}^b y) + ({}^b x, {}^a y) = (A, B)(x, y).$$

Setzt man $a = b$, so folgt

(21′) $$({}^a x, {}^a y) = Da(x, y).$$

Schreibt man daraufhin in (18) ${}^a p$ für p, so ergiebt sich:

(22) $$|(A, p_{(i)} r_{(k)})| = Da(p_{(1)}, p_{(2)})(r_{(1)}, r_{(2)}).$$

Diese Formel kann auch folgendermassen geschrieben werden:

(22′) $$(A, pr)(A, xy) = Da(p, x)(r, y) - ({}^a p, y)({}^{*a} r, x).$$

Im Falle $Da = 0$ ist also die bilineare Form das Produkt zweier Linearfaktoren. Die Umkehrung folgt aus (22) wegen (3).

§ 13. Ist A eine symmetrische Form, so ist

$$({}^{aa}r\,,x) = -({}^{a}r\,,x).$$

(22') ergiebt daher:

(23') $$(A\,,pp)(A\,,xx) = Da\,.\,(p\,,x)^2 + ({}^{a}p\,,x)^2,$$

oder kurz:

$$(A\,,pp)\,.\,A = Da\,.\,pp + {}^{a}p{}^{a}p.$$

Setzt man dies in $(B\,,A)$ ein und entwickelt, so entsteht:

(23) $$(A\,,pp)(B\,,A) = Da(B\,,pp) + (B\,,{}^{a}p{}^{a}p),$$

eine vielgebrauchte Formel.

Will man zwei symmetrische Formen A und B auf die Normalform

$$A = p_{(1)}^2 + p_{(2)}^2,$$
$$B = \lambda_1 p_{(1)}^2 + \lambda_2 p_{(2)}^2$$

bringen, so muss $p_{(2)}$ sowohl durch ${}^{a}p_{(1)}$ wie ${}^{b}p_{(1)}$ teilbar sein, wie aus (23') folgt. Mithin ist $({}^{a}p_{(1)}\,,{}^{b}p_{(1)}) = 0$, d. h.

$$(AB\,,p_{(1)}p_{(1)}) = 0.$$

Ist umgekehrt $(AB\,,pp) = 0$, so ist

$$p_{(1)} = \frac{\sqrt{Da}\,.\,p}{\sqrt{(A\,,pp)}}; \qquad p_{(2)} = \frac{{}^{a}p}{\sqrt{(A\,,pp)}}.$$

Übrigens wird

$$(A\,,A):(A\,,B):(B\,,B) = 2:(\lambda_1 + \lambda_2):2\lambda_1\lambda_2.$$

λ_1 und λ_2 sind also die Wurzeln von

$$Da\,.\,\lambda^2 - (A\,,B)\lambda + Db = 0.$$

IV.

§ 14. Es sei wieder A die symmetrische Form, die zur Bildung der $\partial\xi$ und ∂x diente. Es soll bewiesen werden, *dass die vier Grössen* $\partial\xi$

und ∂x *die Relationen* (A) *erfüllen* oder, was dasselbe besagt, dass für beliebige y

$$(\partial \xi, y) = (\partial x, y)$$

ist. Aus den Identitäten

$$\sum \xi_\lambda x_\lambda = 0, \qquad \sum a_{\lambda\mu} \xi_\lambda \xi_\mu = \sum \alpha_{\lambda\mu} x_\lambda x_\mu$$

folgt nämlich durch Differentiation:

$$\sum \partial \xi_\lambda x_\lambda = -\sum \xi_\lambda \partial x_\lambda \quad \text{oder} \quad (\partial \xi, x) = (\partial x, x)$$

und

$$\sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} \xi_\lambda \partial \xi_\mu = \sum_{\lambda,\mu} \alpha_{\lambda\mu} x_\lambda \partial x_\mu \quad \text{oder} \quad (\partial \xi, {}^a x) = (\partial x, {}^a x).$$

Setzt man jetzt in (18′) für $p_{(1)}$ ${}^a x$, für $p_{(2)}$ x, für r einmal $\partial \xi$, einmal ∂x, so folgt, da $({}^a x, x)$ nicht *identisch* null ist:

$$(\partial \xi, y) = (\partial x, y),$$

w. z. b. w.

Aus (12) ergiebt sich damit durch Differentiation unmittelbar, *dass auch die Systeme* $\partial \mathfrak{b}_{\lambda\mu}$, $\partial \beta_{\lambda\mu}$ *und* $\partial b_{\lambda\mu}$ *durch* (B) *verknüpft sind.*

In der linearen Form

$$(\partial p, x)$$

sind die ∂p_λ linear von den du_λ abhängig. Es sei daher

$$(\partial p, x) = (P, x du)$$

gesetzt, worin

$$p_{\lambda\mu} = \frac{\partial p_\lambda}{\partial u_\mu} - \sum_\rho \begin{Bmatrix} \lambda\mu \\ \rho \end{Bmatrix} p_\rho.$$

Hiernach und nach (19) ist

$$(\partial_2 p, d_1 u) - (\partial_1 p, d_2 u) = MP(d_1 u, d_2 u) \quad \text{und} \quad MP = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial p_1}{\partial u_2} - \frac{\partial p_2}{\partial u_1}\right).$$

P ist also dann und nur dann eine symmetrische Form, wenn (p, du) ein exaktes Differential ist. Als Invariante der Form p sei daher MP auch mit

$$Ip$$

bezeichnet, weil $Ip = 0$ die Integrabilitätsbedingung von p ist.

Ist φ eine Funktion von u_1 und u_2, so ist

$$I(\varphi p) = \varphi \,.\, Ip + \left(p\,,\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right). \tag{24}$$

§ 15. Man kann die Frage aufwerfen, ob zwei Operationen δ_1 und δ_2 vertauschbar sind. Sie ist zu verneinen. Sicher ist jedenfalls, dass in den Ausdrücken

$$\delta_2 \delta_1 \xi_\lambda - \delta_1 \delta_2 \xi_\lambda$$

die zweiten Differentiale der ξ sich wegheben. Führt man aber in der Identität

$$d_1 d_2 (x\,,\,y) = d_2 d_1 (x\,,\,y)$$

die Differentiation mittelst der δ aus, so bleibt

$$(\delta_2 \delta_1 x - \delta_1 \delta_2 x\,,\,y) = (\delta_2 \delta_1 y - \delta_1 \delta_2 y\,,\,x), \tag{25''}$$

woraus folgt, dass $\delta_2 \delta_1 x - \delta_1 \delta_2 x$ auch die ersten Differentiale der x nicht enthält, mithin trilinear in $x\,,\,d_1 u$ und $d_2 u$ ist. Das gleiche ergiebt sich aus der Identität

$$d_2 d_1 (A\,,\,xy) = d_1 d_2 (A\,,\,xy),$$

die zu

$$\big(A\,,(\delta_2 \delta_1 x - \delta_1 \delta_2 x) y\big) = -\big(A\,,(\delta_2 \delta_1 y - \delta_1 \delta_2 y) x\big) \tag{25'''}$$

wird. Die linke Seite dieser Gleichung ist eine bilineare Form in x, y, etwa (C, xy), und die letzte Gleichung sagt aus, dass

$$(C\,,\,xy) = -(C\,,\,yx),$$

also nach (19)

$$(C\,,\,xy) = f \,.\, (x\,,\,y)$$

ist. Offenbar ist f wieder bilinear und alternierend in $d_1 u\,,\,d_2 u$,

$$f = K_a \,.\, (d_1 u\,,\,d_2 u),$$

und K_a hängt nur noch von den Coefficienten von A ab. Man bezeichnet K_a als die *Gauss'sche Invariante* oder in Rücksicht auf ihre geometrische Bedeutung nach BIANCHI kürzer als *Krümmung* von A. Nur wenn sie

null ist, ist identisch $\partial_1\partial_2 = \partial_2\partial_1$. Die beiden Identitäten (25″) und (25‴) können jetzt durch

$$(25') \qquad (\partial_2\partial_1 x - \partial_1\partial_2 x, y) = -K_a.(A, xy)(d_1 u, d_2 u),$$

$$(25) \qquad (A, (\partial_2\partial_1 x - \partial_1\partial_2 x) y) = K_a(x, y)(d_1 u, d_2 u)$$

ersetzt werden.

Man gelangt zu K_a noch auf einem zweiten Weg, der zugleich erkennen lässt, dass K_a nur für specielle Formen verschwindet. Es sei (A, xx) in lineare Faktoren zerlegt:

$$(26) \qquad (A, xx) = (a_{(1)}, x)(a_{(2)}, x).$$

Schreibt man $x + \lambda y$ für x und vergleicht die Coefficienten von λ, so kommt:

$$(26') \qquad 2(A, xy) = (a_{(1)}, x)(a_{(2)}, y) + (a_{(2)}, x)(a_{(1)}, y).$$

Nach (22) ist

$$|(A, a_{(i)} a_{(k)})| = (a_{(1)}, a_{(2)})^2, \qquad (i, k = 1, 2)$$

und durch Ausrechnen der linken Seite nach (26) und (26′) folgt

$$(a_{(1)}, a_{(2)})^2 = -4, \qquad (a_{(1)}, a_{(2)}) = 2i,$$

wobei i eine zweite Wurzel aus -1.

Differenziert man (26), so fallen nach (26′) die mit ∂x behafteten Glieder fort und es bleibt

$$(\partial a_{(1)}, x)(a_{(2)}, x) + (\partial a_{(2)}, x)(a_{(1)}, x) = 0.$$

Also muss $(\partial a_{(i)}, x)$ durch $(a_{(i)}, x)$ teilbar sein. Der Quotient ist eine lineare Form der du, mithin

$$(27) \qquad (\partial a_{(1)}, x) = (a_{(1)}, x)(p, du); \qquad (\partial a_{(2)}, x) = -(a_{(2)}, x)(p, du).$$

Es sei (A, xx) auf irgend eine andere Weise in zwei Faktoren $b_{(1)}$ und $b_{(2)}$ zerlegt. Bei passender Bezeichnung ist dann:

$$(b_{(1)}, x) = (a_{(1)}, x)e^{\varphi}, \qquad b_{(2)}x = (a_{(2)}, x)e^{-\varphi}$$

und andererseits

$$(\partial b_{(1)}, x) = (b_{(1)}, x)(q, du).$$

Nach der ersten Beziehung ist aber

$$(\partial b_{(1)}, x) = d(b_{(1)}, x) - (b_{(1)}, \partial x) = e^{\varphi}[(\partial a_{(1)}, x) + d\varphi . (a_{(1)}, x)],$$

d. h. nach (27)

$$= (b_{(1)}, x)[(p, du) + d\varphi],$$

also

$$(q, du) = (p, du) + d\varphi.$$

Ist also A und p gegeben, so findet man $a_{(1)}$ und $a_{(2)}$ durch eine Quadratur.

Offenbar darf aber p nicht willkührlich gewählt sein. Notwendig und hinreichend dafür, dass $d\varphi = (q, du) - (p, du)$ ein exaktes Differential ist, ist die Integrabilitätsbedingung:

$$Ip = Iq.$$

Ip ist also eine Invariante von A, da es von der Wahl der Faktorenzerlegung unabhängig ist.

Durch Differentiation folgt aus der ersten der Gleichungen (27), da sich die mit ∂x behafteten Glieder wegheben und $\partial a_{(1)}$ durch $a_{(1)}$ ausgedrückt werden kann:

$$(\partial_2 \partial_1 a_{(1)}, x) = (a_{(1)}, x)[(p, d_1 u)(p, d_2 u) + (p, \partial_2 d_1 u) + (\partial_2 p, d_1 u)],$$

also

$$(\partial_2 \partial_1 a_{(1)} - \partial_1 \partial_2 a_{(1)}, x) = (a_{(1)}, x)[(P, d_1 u d_2 u) - (P, d_2 u d_1 u)]$$
$$= Ip(a_{(1)}, x)(d_1 u, d_2 u).$$

Die linke Seite ist nach (25′) gleich $-K_a(A, a_{(1)}x)(d_1 u, d_2 u)$ und $(A, a_{(1)}x)$ nach (26′) gleich $-i(a_{(1)}x)$. Demnach bleibt

$$Ip = iK_a.$$

§ 16. Nach (20) ist $(p, a_{(1)}) = -Ia_{(1)}$ und ebenso $(p, a_{(2)}) = +Ia_{(2)}$. Damit wird nach (18′):

$$2i(p, x) = Ia_{(1)}(a_{(2)}, x) + Ia_{(2)}(a_{(1)}, x).$$

Sind also $(a_{(1)}, du)$ und $(a_{(2)}, du)$ exakte Differentiale, so ist p und damit $K_a = 0$. Und umgekehrt, ist $K_a = 0$, so darf $p = 0$ gewählt werden, und es existieren zwei Linearfaktoren, die der Bedingung

$$Ia_{(1)} \cdot a_{(2)} + Ia_{(2)} \cdot a_{(1)} = 0$$

genügen, aus der $Ia_{(1)} = Ia_{(2)} = 0$ folgt. Man erhält damit den bekannten Satz:

X. *Die Krümmung einer Form A verschwindet dann und nur dann, wenn diese Form das Produkt zweier exakten Differentiale ist.*

Um das Auftreten des Imaginären zu vermeiden, setze man:

$$a_{(1)} = p_{(1)} - ip_{(2)}, \qquad a_{(2)} = p_{(1)} + ip_{(2)}, \qquad p = ip_{(3)}.$$

Dadurch wird

$$(28) \qquad (A, xy) = (p_{(1)}, x)(p_{(1)}, y) + (p_{(2)}, x)(p_{(2)}, y), \qquad (p_{(1)}, p_{(2)}) = 1,$$

$$(28') \qquad (\partial p_{(1)}, x) = (p_{(2)}, x)(p_{(3)}, du), \qquad (\partial p_{(2)}, x) = -(p_{(1)}, x)(p_{(3)}, du),$$

$$(28'') \qquad Ip_{(1)} = (p_{(2)}, p_{(3)}), \qquad Ip_{(2)} = (p_{(3)}, p_{(1)}), \qquad Ip_{(3)} = K_a.$$

Es gilt also folgender Satz:

XI. *Ist $Da = 1$, $p_{(3)}$ eine lineare Form und $Ip_{(3)} = K_a$, so existieren Paare $p_{(1)}, p_{(2)}$ von linearen Formen, welche folgende Relationen erfüllen:*

$$A = p_{(1)}^2 + p_{(2)}^2, \qquad (p_{(1)}, p_{(2)}) = 1, \qquad Ip_{(1)} = (p_{(2)}, p_{(3)}), \qquad Ip_{(2)} = (p_{(3)}, p_{(1)}),$$

und alle diese Paare lassen sich durch eine Quadratur bestimmen.

In den Gleichungen (28″) ist eine Beziehung auf A nur durch das im Nenner stehende T enthalten. Schreibt man in der dritten noch $(p_{(1)}, p_{(2)})K$ für K_a, so gelten alle drei unabhängig davon, welches T zur Bildung der Invarianten benutzt wird. Daher kann man weiterhin folgenden Satz aussprechen:

XII. *Die drei Gleichungen*

$$(C) \qquad Ip_{(1)} = (p_{(2)}, p_{(3)}); \qquad Ip_{(2)} = (p_{(3)}, p_{(1)}); \qquad Ip_{(3)} = K(p_{(1)}, p_{(2)})$$

sagen aus, dass die Form $p_{(1)}^2 + p_{(2)}^2$ die Krümmung K besitzt.

§ 17. Ist $DA = 1$, so ist nach (28):

$$(p_{(1)}, p_{(2)})^2 = 1,$$

also bei passender Bezeichnung

$$(p_{(1)}, p_{(2)}) = 1.$$

Damit wird

$$(A, p_{(1)}x) = -(p_{(2)}, x),$$
$$(A, p_{(1)}p_{(1)}) = 1.$$

Die letztere Bedingung ist nach (23') hinreichend dafür, dass $A - p_{(1)}^2$ ein vollständiges Quadrat wird. Die Form

$$(p_{(1)}, x) = \frac{(z, x)}{\sqrt{(A, zz)}} \tag{29}$$

genügt ihr identisch, wenn z eine beliebige lineare Form, nur kein Teiler von A ist. Ist $\bar{z}$ von z linear abhängig, also $\bar{z} = f.z$, so ist

$$\frac{(\bar{z}, x)}{\sqrt{(A, \bar{z}\bar{z})}} = \frac{(z, x)}{\sqrt{(A, zz)}}.$$

Durchläuft also z alle linearen, von einander unabhängigen Formen, ausschliesslich der beiden Teiler von A, so ergiebt (29) alle Formen $p_{(1)}$, für die $(A, p_{(1)}p_{(1)}) = 1$ ist, und jede nur einmal. Aus (29) folgt weiter:

$$(p_{(2)}, x) = -(A, p_{(1)}x) = -(A, zz)^{-\frac{1}{2}}(A, zx). \tag{29'}$$

Durch Differentiation folgt weiter aus $(p_{(1)}, z) = 0$:

$$(\partial p_{(1)}, z) = (\partial z, p_{(1)}) = (A, zz)^{-\frac{1}{2}}(\partial z, z).$$

Nun ist $(\partial p_{(1)}, z) = (p_{(2)}, z)(p_{(3)}, du)$ und $(p_{(2)}, z)$ nach (28') gleich $-(A, zz)^{\frac{1}{2}}$. Schreibt man noch x für du, so folgt:

$$(p_{(3)}, x) = -(A, zz)^{-1}(Z, zx). \tag{29''}$$

Die Ausdrücke (29 bis 29'') erfüllen also die Gleichungen (28 bis 28'') identisch. Sie enthalten drei verschiedene Linearformen, nämlich z, ${}^{a}z$ und

2. Will man ausser z nur noch *eine*, zunächst willkührliche Form r benutzen, so hat man (18') anzuwenden und erhält:

$$(29''')\quad \begin{cases} (p_{(2)}, x) \cdot \sqrt{(A, zz)}(z, r) = -(A, zr)(z, x) + (A, zz)(r, x), \\ (p_{(3)}, x) \cdot (A, zz)(z, r) = -(Z, zr)(z, x) + (Z, zz)(r, x). \end{cases}$$

V.

§ 18. Wenn die lineare Form (p, du) ein exaktes Differential dp ist, so nennt man ihre Invarianten mit A »Differentialparameter von p«. Für einige derselben hat man besondere Bezeichnungen eingeführt, und zwar:

$$(A, pp) = \Delta_1 p; \qquad (A, P) = \Delta_2 p; \qquad \frac{1}{2}(P, P) = \Delta_{22} p.$$ [1]

In Analogie hierzu kann man noch

$$(P, pp) = \Delta_{12} p$$

setzen. Es ist dies dieselbe Invariante, die Hr. Weingarten in der Preisschrift[2] mit Ip bezeichnet hat.

Ist gleichzeitig $(q, du) = dq$, so setzt man noch

$$(A, pq) = \Delta(p, q);^{3} \qquad (p, q) = \theta(p, q).^{4}$$

Nach (22) ist

$$(30)\qquad \Delta_1 p \Delta_1 q - \Delta^2(p, q) = \theta^2(p, q).$$

Für $\Delta_2 p$ hat man die Darstellung

$$\Delta_2 p = \frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial u_2}\left[\frac{1}{T}\left(a_{11}\frac{\partial p}{\partial u_2} - a_{12}\frac{\partial p}{\partial u_1}\right)\right] - \frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial u_1}\left[\frac{1}{T}\left(a_{12}\frac{\partial p}{\partial u_2} - a_{22}\frac{\partial p}{\partial u_1}\right)\right].$$

Dieselbe ergiebt sich aus unsern Entwicklungen folgendermassen:

---

[1] Bei Darboux $-\sigma p$, bei Weingarten, *Preisschrift*, θp.

[2] pag. 20, Gleich. 15.

[3] Bei den Italienischen Mathematikern $\nabla(p, q)$.

[4] Darboux, l. c.

Es ist $\delta^a p = {}^a\delta p$, also

$$(\delta^a p, x) = (\delta p, {}^{*a}x) = (P^* A, x du)$$

und damit nach (16′)

$$I({}^a p) = M(P^* A) = (A, P),$$

w. z. b. w.

Für $\Delta_{22} p$ giebt Bianchi[1] ohne Beweis die Formel

(31) $$4\Delta_{22} p \Delta_1 p = 2\Delta_2 p \Delta(p, \Delta_1 p) - \Delta_1 \Delta_1 p.$$

Man hat aber

$$d(A, pp) = 2(A, p\delta p) = -2(\delta p, {}^* p) = -2(P, {}^* p du).$$

Setzt man für du $p, {}^a p$ oder ${}^p p$, so folgt:

(32′) $$\left(\frac{\partial}{\partial u}(A, pp), p\right) = -2(P, {}^a pp),$$

(32″) $$\left(A, \frac{\partial}{\partial u}(A, pp) p\right) = 2(P, {}^a p {}^a p),$$

(32‴) $$\left(P, p\frac{\partial}{\partial u}(A, pp)\right) = 2(P, {}^a p {}^p p) = 2({}^{pa} p, {}^p p) = (P, P)(A, pp).$$

Aus (32″) folgt zunächst nach (23)

(32) $$\frac{1}{2}\Delta(p, \Delta_1 p) = \Delta_1 p \Delta_2 p - \Delta_{12} p.$$

Ferner hat man nach (22), da P eine symmetrische Form ist,

$$(P, {}^a p {}^a p)(P, pp) - (P, {}^a pp)^2 = (A, pp)^2 \frac{1}{2}(P, P),$$

oder nach (32″) und (32′)

$$\frac{1}{2}\Delta(p, \Delta_1 p)\Delta_{12} p - \frac{1}{4}\theta^2(p, \Delta_1 p) = \Delta_1^2 p \cdot \Delta_{22} p.$$

Hierin hat man nur θ und Δ_{12} nach (30) und (32) auszudrücken, um (31) zu erhalten.

Unter der Annahme $(p, du) = dp$ lautet noch (32‴):

$$\left(P, \frac{\partial p}{\partial u} \cdot \frac{\partial \Delta_1 p}{\partial u}\right) = 2\Delta_{22} p \Delta_1 p$$

[1] *Lezioni di geometria differenziale,* Kap. II, Gleich. (26*).

und, wenn man die linke Seite ausschreibt,

(33)
$$2\Delta_{22}p\,\Delta_1 p$$
$$=\frac{1}{T^2}\left[p_{11}\frac{\partial p}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial \Delta_1 p}{\partial u_2}-p_{12}\left(\frac{\partial p}{\partial u_1}\frac{\partial \Delta_1 p}{\partial u_2}+\frac{\partial p}{\partial u_2}\frac{\partial \Delta_1 p}{\partial u_1}\right)+p_{22}\frac{\partial p}{\partial u_1}\frac{\partial \Delta_1 p}{\partial u_1}\right].$$

Diese Formel scheint bisher noch nicht angegeben worden zu sein.

§ 19. In den Ausdrücken (29—29‴) hatte z die Repräsentanten der Classen abhängiger linearer Formen zu durchlaufen, ausschliesslich der beiden Teiler von A. Diese Beschränkung bedarf kaum der Erwähnung, weil in diesem Falle die Formeln durch das Verschwinden von (A, zz) bedeutungslos werden.

Man kann aber als Repräsentant irgend einer Klasse linear abhängiger Formen stets ein exaktes Differential wählen und demnach z alle reelle linear unabhängigen Differentiale dz durchlaufen lassen. Dabei durchläuft z selbst alle von einander unabhängige Funktionen zweier Variabeln; r sollte irgend eine von z unabhängige Covariante von z sein. Setzen wir fest, dass r ein exaktes Differential $d\sigma$ ist, so ist σ eine von z unabhängige Invariante von z. Die einfachste Invariante von z ist $\Delta_1 z$. Wählen wir daher, vorausgesetzt, dass $\Delta_1 z$ keine Funktion von z allein ist, $(r, du) = d\Delta_1 z$, so gehen die Formeln (29) und (29‴) unter Beachtung von (32‴) über in folgende:

(D)
$$\begin{cases}(p_{(1)}, du) = \dfrac{dz}{\sqrt{\Delta_1 z}},\\[2ex](p_{(2)}, du) = \dfrac{-\Delta(z, \Delta_1 z)\,dz + \Delta_1 z\, d\Delta_1 z}{\theta(z, \Delta_1 z)\cdot\sqrt{\Delta_1 z}},\\[2ex](p_{(3)}, du) = \dfrac{-2\Delta_{22} z\,\Delta_1 z\,dz + \Delta_{12} z\, d\Delta_1 z}{\theta(z, \Delta_1 z)\cdot\Delta_1 z}.\end{cases}$$

Diese Ausdrücke werden auch dann bedeutungslos, wenn $\Delta_1 z$ eine Funktion von z allein ist, d. h. sie stellen alle Formen p_1, p_2, p_3 dar, die den Relationen (28 bis 28″) genügen, ausgeschlossen den Fall, dass (p_1, du) ein exaktes Differential ist.

Aus den Sätzen X und XI folgt nun, dass man alle Tripel von Formen, die die Bedingungen (C) erfüllen, herstellen kann, indem man sich alle Formen der Krümmung K angeschrieben denkt und sie in all-

gemeinster Weise als Summen zweier Quadrate, $p_{(1)}^2 + p_{(2)}^2$, darstellt, wobei $(p_{(1)}, p_{(2)}) = 1$ zu nehmen ist. Dann genügen nämlich $p_{(1)}, p_{(2)}$ und

$$p_{(3)} = -Ip_{(1)} \cdot p_{(1)} - Ip_{(2)} \cdot p_{(2)}$$

den Relationen (C).

Die Formen der Krümmung K ordnen sich aber in Schaaren äquivalenter Formen, d. h. solcher Formen, die durch Transformation der Veränderlichen in einander übergehen. Zu jeder solchen Schaar gehört die Gruppe der Substitutionen, die die Formen der Schaar und damit die zugehörigen Tripel $p_{(1)}, p_{(2)}, p_{(3)}$ in einander überführen. Infolge ihrer Invarianz stellen mithin (unter der Beschränkung $Ip_{(1)} \gtrless 0$) die Gleichungen (D) sämtliche zu einer Schaar gehörigen Tripel $p_{(1)}, p_{(2)}, p_{(3)}$ dar.

Hier tritt nun ein wesentlicher Unterschied zwischen dem Falle eines veränderlichen und eines constanten K auf. Im ersten Fall giebt es unter den Formen der Krümmung K unendlich viele Schaaren, aus jeder Klasse (d. h. Gesamtheit äquivalenter Formen) ausschliesslich der Klassen constanter Krümmung eine, und die zu einer solchen Schaar gehörige Substitutionengruppe umfasst niemals die Gesamtheit aller Substitutionen.

Ist dagegen K eine Constante, so besteht die Gesamtheit aller Formen der Krümmung K aus einer einzigen Schaar, da diese Formen eine Klasse bilden. Die zugehörige Substitutionsgruppe umfasst daher alle Substitutionen. *Im Falle $K = const.$, und nur in diesem, stellen also die Formeln* (D) *alle Formen dar, welche die Relationen* (C) *und* $Ip_{(1)} \gtrless 0$ *erfüllen.*

VI.

§ 20. In dem singulären Fall $Ip_{(1)} = 0$ muss sich naturgemäss der gleiche Unterschied zwischen veränderlichem und constantem K geltend machen. Befriedigt man durch den Ansatz

$$(34) \qquad (p_{(1)}, du) = dp, \qquad (p_{(2)}, du) = \lambda dt, \qquad (p_{(3)}, du) = \mu dt$$

die Gleichung $Ip_{(1)} = (p_{(2)}, p_{(3)}) = 0$ identisch, so folgt aus den beiden andern

$$\theta(t, \lambda) = \mu\theta(t, p); \qquad \theta(t, \mu) = -\lambda K\theta(t, p).$$

Also sind t, p unabhängige Funktionen. Führt man sie als neue Variable ein, so folgt:

$$(34') \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial p} = \mu, \qquad \frac{\partial \mu}{\partial p} = -K\lambda,$$

also:

$$(35) \qquad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p^2} + K\lambda = 0.$$

Ist K nicht constant, so ist es als Funktion von u_1, u_2 gegeben. Wählt man für λ irgend eine Funktion von p und t, nur so, dass $\frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p^2}$ nicht constant ist, so ist (35) eine Beziehung zwischen p, t und u_1, u_2. Bestimmt man noch p, t als Funktionen von u_1, u_2 so, dass diese Beziehung identisch erfüllt ist, so sind die Formen (34) für $\mu = \frac{\partial \lambda}{\partial p}$ den Relationen (C) unterworfen.

Ist dagegen K eine Constante, so ist (35) eine Differentialgleichung für λ, und es folgt aus ihr, wenn $K \gtrless 0$:

$$\lambda = a \cos kp + b \sin kp, \quad \text{wo} \quad k = \sqrt{K},$$

und a und b von t abhängen können. Jenachdem $a^2 + b^2 \gtrless 0$ oder $= 0$ ist, kann $\lambda = f(t) \cos k(p - p_0)$ oder $\lambda = f(t) e^{ikp}$ gesetzt werden. Indem noch für $\int f(t) dt$ t geschrieben und (34′) beachtet wird, erhält man folgende identische Darstellung der Formen $p_{(1)}, p_{(2)}, p_{(3)}$ im Falle $K = \text{const.} \gtrless 0$, $Ip_{(1)} = 0$:

$$(\mathrm{D}') \begin{cases} p_{(1)} = dp, \quad p_{(2)} = \cos k(p - p_0).dt, \quad p_{(3)} = -k \sin k(p - p_0).dt, \\ \qquad\qquad p_0 = p_0(t), \\ \text{oder} \\ p_{(1)} = dp, \quad p_{(2)} = e^{ikp} dt, \quad p_{(3)} = ike^{ikp} dt, \quad i = \pm\sqrt{-1}. \end{cases}$$

Der Fall $K = 0$ bietet keine principiellen Schwierigkeiten. Der Vollständigkeit wegen sei angeführt, dass entweder

$$p_{(1)} = dp, \quad p_{(2)} = (p - f(t))dt, \quad p_{(3)} = dt,$$

oder

$$p_{(1)} = dp, \quad p_{(2)} = dt, \quad p_{(3)} = 0 \text{ ist.}$$

VII.

§ 21. Die Relationen (C) treten bei der Betrachtung orthogonaler Systeme, die von zwei oder mehr Veränderlichen abhängen, wieder auf. Sei $(X_i^{(\lambda)})$ ein orthogonales System. Componiert man es mit dem System seiner Differentiale, $(dX_i^{(\lambda)})$, so erhält man die unendlich kleinen Grössen

$$\rho_{ik} = \sum_\lambda dX_i^{(\lambda)} X_k^{(\lambda)}.$$

Infolge der Orthogonalitätsbedingungen

$$\sum_k X_k^{(\lambda)} X_k^{(\mu)} = e_{\lambda\mu}$$

ist

(36) $$dX_i^{(\lambda)} = \sum_k \rho_{ik} X_k^{(\lambda)},$$

und aus der anderen Reihe,

$$\sum_\lambda X_i^{(\lambda)} X_k^{(\lambda)} = e_{ik},$$

folgt durch Differenzieren:

(37) $$\rho_{ik} + \rho_{ki} = 0.$$

Es bietet sich auf verschiedenen Gebieten die Aufgabe, wenn die ρ_{ik} (als lineare Formen der Differentiale der Variabeln) gegeben sind, die $X_i^{(\lambda)}$ aus den Differentialgleichungen (36) zu bestimmen. Dabei gilt der Satz:

XIII. *Giebt es ein orthogonales System, welches den Gleichungen* (36) *genügt, so giebt es für jedes (orthogonale) System von Anfangswerthen ein solches und nur eines.*

Genügt nämlich das System $(Y_i^{(\lambda)})$ den Gleichungen (36), so folgt für die Grössen $X_i^{(\lambda)} = \sum_\mu \alpha_{\lambda\mu} Y_i^{(\mu)}$, wenn die $\alpha_{\lambda\mu}$ constant sind:

$$dX_i^{(\lambda)} = \sum_\mu \alpha_{\lambda\mu} dY_i^{(\mu)} = \sum_{\mu,k} \alpha_{\lambda\mu} \rho_{ik} Y_k^{(\mu)} = \sum_k \rho_{ik} X_k^{(\lambda)},$$

und wenn umgekehrt die Systeme $(X_i^{(\lambda)})$ und $(Y_i^{(\lambda)})$ beide (36) erfüllen, so ist:

$$\sum_i (X_i^{(\lambda)} dY_i^{(\mu)} + dX_i^{(\lambda)} Y_i^{(\mu)}) = \sum_{i,k} \rho_{ik} X_i^{(\lambda)} Y_k^{(\mu)} + \sum_{i,k} \rho_{ik} X_k^{(\lambda)} Y_i^{(\mu)} = 0,$$

also

$$\sum_i X_i^{(\lambda)} Y_i^{(\mu)} = \alpha_{\lambda\mu},$$

wo $\alpha_{\lambda\mu}$ constant ist. Da das System $(\alpha_{\lambda\mu})$ aus den orthogonalen $(X_i^{(\lambda)})$ und $(Y_i^{(\lambda)})$ zusammengesetzt ist, ist es selbst orthogonal. *Somit erhält man aus einem particulären Integral von* (36) *das allgemeine durch Composition mit einem willkürlichen constanten Orthogonalsystem.* Damit ist Satz XIII ausgesprochen.

§ 22. Wenn das System $X_i^{(\lambda)}$ von zwei unabhängigen Variabeln u_1, u_2 abhängt, so erfordert das Bestehen der Gleichungen (36) das Erfülltsein der Integrabilitätsbedingungen für die $dX_i^{(\lambda)}$. Die ρ_{ik} sollen als lineare Formen der du_λ mit $(r_{(ik)}, du)$ bezeichnet werden. Dann ist

$$\sum_k I(X_k^{(\lambda)} r_{(ik)}) = \sum_k X_k^{(\lambda)} Ir_{(ik)} + \sum_k \left(r_{(ik)}, \frac{\partial}{\partial u} X_k^{(\lambda)}\right)$$

$$= \sum_k X_k^{(\lambda)} \{Ir_{(ik)} + \sum_l (r_{(il)}, r_{(lk)})\} = 0,$$

d. h.

$$Ir_{(ik)} + \sum_l (r_{(il)}, r_{(lk)}) = 0.$$

Die Betrachtung werde jetzt auf ein dreireihiges Orthogonalsystem beschränkt und

$$(37') \quad r_{(23)} = -r_{(32)} = r_{(1)}, \qquad r_{(31)} = -r_{(13)} = r_{(2)}, \qquad r_{(12)} = -r_{(21)} = r_{(3)}$$

gesetzt. Dadurch werden die Integrabilitätsbedingungen zu

$$(C^*) \qquad Ir_{(1)} = (r_{(2)}, r_{(3)}); \qquad Ir_{(2)} = (r_{(3)}, r_{(1)}); \qquad Ir_{(3)} = (r_{(1)}, r_{(2)}).$$

Sind die beiden Seiten der drei Gleichungen für sich null, so lassen sich die Gleichungen (36) auf den Fall einer unabhängigen Veränderlichen zurückführen und sind dann, wie später zu zeigen ist, stets integrabel.

Unter Ausschluss dieses Falles werde angenommen, dass $(r_{(2)}, r_{(3)})$ nicht null sei. *Dann ist* $r_{(1)}$ *vermittelst der beiden letzten der Gleichungen* (C*) *nach* (18') *durch* $r_{(2)}, r_{(3)}$ *eindeutig bestimmt.*

Existiert also ein orthogonales System, welches die beiden Gleichungen

$$(36') \qquad -\sum_\lambda X_3^{(\lambda)} dX_1^{(\lambda)} = (r_{(2)}, du), \qquad \sum_\lambda X^{(\lambda)} dX_1^{(\lambda)} = (r_{(3)}, du)$$

erfüllt, so ist auch

$$(36'')\qquad \sum_\lambda X_3^{(\lambda)} dX_2^{(\lambda)} = (r_{(1)}, du)$$

und damit allgemein (36) befriedigt.

Setzt man aber $r_{(3)} = -p_{(1)}$, $r_{(2)} = p_{(2)}$, $r_{(1)} = p_{(3)}$, so sagen die Gleichungen (C*) nach Satz XII aus, dass die quadratische Form $r_{(2)}^2 + r_{(3)}^2$ die Krümmung 1 besitzt. Nach einem Satz des Hrn. WEINGARTEN[1] existieren also drei Funktionen $X_1^{(1)}, X_1^{(2)}, X_1^{(3)}$ welche die beiden Bedingungen

$$(38)\qquad \sum_\lambda X_1^{(\lambda)} X_1^{(\lambda)} = 1,$$

$$(39)\qquad \sum_\lambda dX_1^{(\lambda)} dX_1^{(\lambda)} = (r_{(2)}, du)^2 + (r_{(3)}, du)^2$$

erfüllen. Infolge der Unabhängigkeit von $r_{(2)}$ und $r_{(3)}$ kann man aber

$$(40)\qquad dX_1^{(\lambda)} = X_2^{(\lambda)}(r_{(3)}, du) - X_3^{(\lambda)}(r_{(2)}, du)$$

setzen, wobei nach (18')

$$(40')\qquad X_2^{(\lambda)} : X_3^{(\lambda)} : 1 = \left(\frac{\partial X_1^{(\lambda)}}{\partial u}, r_{(2)}\right) : \left(\frac{\partial X_1^{(\lambda)}}{\partial u}, r_{(3)}\right) : (r_{(3)}, r_{(2)}).$$

Die so definierten Grössen $X_2^{(\lambda)}, X_3^{(\lambda)}$ erfüllen mit $X_1^{(\lambda)}$ identisch die Orthogonalitätsbedingungen, wie man z. B. erkennt, wenn man (40) auf (39) und die aus (38) folgende Gleichung $\sum_\lambda X_1^{(\lambda)} dX_1^{(\lambda)} = 0$ anwendet und beachtet, dass die Coefficienten der $r_{(i)}$ einzeln verschwinden müssen.

Aus (40) ergiebt sich dann aber unmittelbar (36'), also genügt dieses System den Gleichungen (36), d. h.:

XIV. *Die Bedingungen* (C*) *sind notwendig und hinreichend für die Existenz orthogonaler Systeme, die den Gleichungen* (36) *genügen.*

§ 23. Die Bestimmung der Grössen $X_1^{(\lambda)}$ erfordert nach dem erwähnten Satz des Hrn. WEINGARTEN die Integration zweier gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Man kann dies noch auf andere Weise erkennen. Die Differential-

---

[1] Crelles Journal, Bd. 94 und 95.

gleichungen (36) lauten ausgeschrieben, unter Weglassung des oberen Index:

$$dX_1 = (r_{(3)}, du)X_2 - (r_{(2)}, du)X_3;$$
$$dX_2 = (r_{(1)}, du)X_3 - (r_{(3)}, du)X_1;$$
$$dX_3 = (r_{(2)}, du)X_1 - (r_{(1)}, du)X_2.$$

Setzt man, um die Gleichung $\Sigma X_i^2 = 1$ identisch zu befriedigen,

$$X_1 = \frac{x+y}{x-y}, \qquad X_2 = \frac{1-xy}{x-y}, \qquad X_3 = \frac{1+xy}{i(x-y)},$$

so erhält man nach einiger Rechnung statt der drei angeschriebenen Gleichungen die eine Riccatische, der x und y genügen:

$$(41) \qquad dx = \frac{i}{2}\{(r_{(2)} - ir_{(3)}, du) + 2(r_{(1)}, du)x - (r_{(2)} + ir_{(3)}, du)x^2\}.$$

Hängen die $r_{(i)}$ nur von einer Variabeln ab, so sind für die Integrabilität von (41) keine weiteren Bedingungen erforderlich. Im Falle zweier unabhängiger Veränderlichen zerfällt die Gleichung in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen nach je einer der Variabeln, und diese kann man (als Riccatische) leicht in bekannter Weise auf lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung zurückführen.

§ 24. Bezeichnet man die Form $r_{(2)}^2 + r_{(3)}^2$ mit G_1 und wählt T so, dass $(r_{(2)}, r_{(3)}) = 1$ wird, so ist $(G_1, xr_{(3)}) = (r_{(2)}, x)$, also nach (40′) auch $X_2^{(\lambda)} = \left(G_1, \frac{\partial X_1^{(\lambda)}}{\partial u} r_{(3)}\right)$. Führt man also mittelst der Formeln (D)

$$r_{(3)} = -p_{(1)} = -\frac{dz}{\sqrt{\Delta_1 z}}$$

ein, so wird nach (40′) und (D):

$$(E) \quad \begin{cases} X_2^{(\lambda)} = -\dfrac{\Delta(z, X_1^{(\lambda)})}{\sqrt{\Delta_1 z}}, \qquad X_3^{(\lambda)} = -\dfrac{\theta(z, X_1^{(\lambda)})}{\sqrt{\Delta_1 z}}; \\ r_{(3)} = -\dfrac{dz}{\sqrt{\Delta_1 z}}, \\ r_{(2)} = \dfrac{-\Delta(z, \Delta_1 z)dz + \Delta_1 z d\Delta_1 z}{\theta(z, \Delta_1 z)\sqrt{\Delta_1 z}}, \\ r_{(1)} = \dfrac{-2\Delta_{22} z \Delta_1 z dz + \Delta_{12} z d\Delta_1 z}{\theta(z, \Delta_1 z) \cdot \Delta_1 z}, \end{cases}$$

wobei die Differentialparameter aus der Form G_1 gebildet sind. Wenn

$$\sum_\lambda dX_1^{(\lambda)} dX_1^{(\lambda)} = (G_1, du du)$$

ist, so genügen die $X_i^{(\lambda)}$ *identisch* den Orthogonalitätsbedingungen, die $r_{(i)}$ den Relationen (C') und die $dX_i^{(\lambda)}$ den Gleichungen (36). Jedes orthogonale System, in welchem weder $Ir_{(1)}$ noch $Ir_{(2)}$ verschwindet, ist durch die Formeln (E) darstellbar. Alle von z abhängigen Funktionen liefern, in (E) eingesetzt, dasselbe orthogonale System.

VIII.

§ 25. Die Aufgabe, alle Biegungen einer gegebenen Fläche zu bestimmen, führt auf die andere, eine quadratische Differentialform von nicht verschwindender Discriminante als Summe dreier Quadrate exakter Differentiale darzustellen.

Hat man überhaupt (A, xx) als Summe dreier Quadrate dargestellt:

$$(A, xy) = \sum_i (a_{(i)}, x)(a_{(i)}, y), \qquad (i = 1, 2, 3)$$

und ist T^2 wieder die Discriminante von A, so ist

$$2 = (A, A) = \sum_{i,k} (a_{(i)}, a_{(k)})^2.$$

Bezeichnet man die drei Grössen $(a_{(2)}, a_{(3)})$, $(a_{(3)}, a_{(1)})$, $(a_{(1)}, a_{(2)})$ beziehungsweise mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ so wird daraus

$$\sum_i \alpha_i^2 = 1$$

und damit

$$(A, a_{(i)} a_{(k)}) = e_{ik} - \alpha_i \alpha_k.$$

Ferner ist nach (18')

$$\sum_i \alpha_i (a_{(i)}, p) = 0, \tag{42}$$

und dies ist zugleich die einzige lineare Relation, die zwischen den Formen $a_{(i)}$ bestehen kann.

Endlich ist noch

$$\sum_i (A, a_{(i)} p)(a_{(i)}, x) = -\sum_i (a_{(i)}, {}^a p)(a_{(i)}, x) = -(A, {}^a p x) = (p, x) \tag{43}$$

also

$$(43') \qquad \sum_i (A\,,\,a_{(i)}p)(A\,,\,a_{(i)}q) = (A\,,\,pq).$$

Mit (42) folgt aus (43) für ein beliebiges h:

$$(44) \qquad \sum_i [(A\,,\,a_{(i)}p) + h\,.\,\alpha_i](a_{(i)}\,,\,x) = (p\,,\,x),$$

und dies ist die allgemeinste Darstellung von p durch $a_{(1)}\,,\,a_{(2)}\,,\,a_{(3)}$.

§ 26. Ist nun A speciell als Summe der Quadrate dreier exakten Differentiale

$$dz_i = (z_{(i)}\,,\,du)$$

dargestellt, so ist $A - z_{(1)}^2 = z_{(2)}^2 + z_{(3)}^2$ eine Form der Krümmung null; und umgekehrt: ist die Krümmung von $A - z_{(1)}^2$ null, so kann man durch eine Quadratur zwei Differentiale dz_2 und dz_3 bestimmen, so dass

$$A - z_{(1)}^2 = z_{(2)}^2 + z_{(3)}^2$$

wird.

Um die Krümmung von $A - z_{(1)}^2$ zu berechnen, sei, wie in (29),

$$z_{(1)}\,.\,(A\,,\,z_{(1)}z_{(1)})^{-\frac{1}{2}} = p_{(1)}$$

gesetzt, was im allgemeinen, und, wenn Realität verlangt wird, stets möglich ist. Dadurch wird für $z = z_{(1)}$, $\zeta = \zeta_1 = \sqrt{1 - (A\,,\,zz)}$:

$$(A\,,\,xx) = (p_{(1)}\,,\,x)^2 + (p_{(2)}\,,\,x)^2, \qquad (p_{(1)}\,,\,p_{(2)}) = 1,$$

$$(A\,,\,xx) - (z\,,\,x)^2 = (q_{(1)}\,,\,x)^2 + (q_{(2)}\,,\,x)^2, \qquad (q_{(1)}\,,\,q_{(2)}) = \zeta,$$

wobei

$$q_{(1)} = \zeta . p_{(1)} = \zeta . \frac{z}{\sqrt{1 - \zeta^2}}, \qquad q_{(2)} = p_{(2)}.$$

Nunmehr ist nach (24)

$$Ip_{(1)} = \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}^3}\left(z\,,\,\frac{\partial \zeta}{\partial u}\right), \qquad Iq_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}^3}\left(z\,,\,\frac{\partial \zeta}{\partial u}\right),$$

weil ja $(z\,,\,du)$ ein exaktes Differential sein soll. Mithin ist

$$Iq_{(1)} = \frac{1}{\zeta}\, Ip_{(1)},$$

und daraus nach (C), weil $q_{(2)} = p_{(2)}$:

$$q_{(3)} = \frac{1}{\zeta} p_{(3)} \quad \text{und} \quad Iq_{(3)} = \frac{1}{\zeta} K_a - \frac{1}{\zeta^2}\left(p_{(3)}, \frac{\partial \zeta}{\partial u}\right).$$

Es war

$$(A, zz) = 1 - \zeta^2;$$

somit ist $\frac{\partial (A, zz)}{\partial u} = -2\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial u}$ und nach (29″) und (32‴)

$$\left(p_{(3)}, \frac{\partial \zeta}{\partial u}\right) = \frac{1}{2\zeta . (A, zz)}\left(Z, z\frac{\partial (A, zz)}{\partial u}\right) = \frac{\Delta_{22} z}{\zeta}.$$

Wir erhalten mithin für die Krümmung von $A - dz^2$ den Ausdruck

$$\{K_a(1 - \Delta_1 z) - \Delta_{22} z\}(1 - \Delta_1 z)^{-2}$$

und damit den bekannten Satz:

XV. *Genügt z der Differentialgleichung*

$$\text{(F)} \qquad \Delta_{22} z = K_a(1 - \Delta_1 z),$$

und ist $\Delta_1 z \gtrless 1$, so kann man durch Quadraturen zwei Funktionen x, y bestimmen, derart dass $(A, du du) = dx^2 + dy^2 + dz^2$ wird.

Ist $\Delta_1 z = 1$, so ist nach (33) $\Delta_{22} z = 0$ und (F) erfüllt. Andererseits ist die Discriminante von $A - dz^2$ null, d. h.

$$(A, du du) = dz^2 + (p, du du),$$

wo p nur im Falle $K_a = 0$ ein exaktes Differential sein kann. Die Differentialgleichung besitzt also Integrale, die zu dem Deformationsproblem in keinerlei Beziehung stehen. Ausserdem werden die Funktionen x und y nur dann reell, wenn $\Delta_1 z < 1$ ist. Nach irgend welchen bekannten Methoden ist die Gleichung nur in dem fast trivialen Fall $K_a = 0$ zu integrieren.

IX.

§ 27. Differentiiert man beide Seiten der Gleichung

$$(A, xy) = \sum_i (z_{(i)}, x)(z_{(i)}, y), \qquad (i = 1, 2, 3)$$

drückt $\partial z_{(i)}$ durch Z_i aus und schreibt p für du, so kommt:

$$\sum_i (Z_i, xp)(z_{(i)}, y) + \sum_i (Z_i, yp)(z_{(i)}, x) = 0.$$

Vertauscht man p, x, y, so folgt aus der Symmetrie der Formen Z_i:

$$\sum_i (Z_i, xy)(z_{(i)}, p) = 0.$$

Da die Gleichung (42) die einzige lineare Relation zwischen den Formen $a_{(i)}$ ist, muss

$$(45) \qquad (Z_i, xy) = -\zeta_i(C, xy) \quad \text{oder} \quad (\partial z_{(i)}, x) = -\zeta_i(C, xdu)$$

sein, wobei auch C eine symmetrische Form ist. Sie wird in der Flächentheorie als *zweite Fundamentalform* bezeichnet und lässt sich als:

$$(45') \qquad (C, xdu) = \sum_i d\zeta_i(z_{(i)}, x) = -\sum_i \zeta_i(Z_i, xdu)$$

darstellen.

Das Differential $d\zeta_i$ sei mit $(\bar{z}_{(i)}, du)$ bezeichnet. Damit ist

$$(\bar{z}_{(1)}, du) = (\partial z_{(2)}, z_{(3)}) + (z_{(2)}, \partial z_{(3)}) = -\zeta_2(C, z_{(1)}du) + \zeta_3(C, z_{(2)}du).$$

Drückt man die ζ_i durch die $z_{(i)}$ aus und beachtet $(z_{(i)}, z_{(i)}) = 0$, so wird:

$$(\bar{z}_{(1)}, du) = -\sum_{i=1}^{3} (z_{(i)}, z_{(1)})(C, z_{(i)}du) = \sum_{i=1}^{3} (z_{(i)}, z_{(1)})(z_{(i)}, {}^c du) = (A, z_{(1)}{}^c du),$$

also allgemein:

$$(46) \qquad (\bar{z}_{(i)}, x) = -(z_{(i)}, {}^{ac}x).$$

Hieraus ergiebt sich nach (23) und (43'):

$$\sum (\bar{z}_{(i)}, x)^2 = (A, {}^c x^c x) = (A, C)(C, xx) - Dc(A, xx).$$

Diese Form, welche das Quadrat des Linienelementes der Gauss'schen Kugel darstellt, sei mit (G, xx) bezeichnet. Man findet leicht:

$$\frac{1}{2}(G, G) = Dg = (Dc)^2.$$

Dc sei mit K bezeichnet und der Fall $K = 0$ von der weiteren Betrachtung ausgeschlossen. Dann ist mit A und C auch G bekannt, und die

Bestimmung der ζ_i erfordert die Integration der im VII[ten] Capitel erwähnten Riccatischen Gleichung. Hiermit hat man auch die Formen $z_{(i)}$; denn aus (46) folgt, indem man ${}^{ca}x$ für x setzt:

$$(46') \qquad (z_{(i)}\,, x) = -K^{-1}(\bar{z}_{(i)}\,, {}^{ca}x) = -K^{-1}(A\,, {}^{c}\bar{z}_{(i)}x).$$

Diese Ausdrücke erfüllen identisch die Forderung

$$\sum z_{(i)}^2 = A.$$

§ 28. Die angegebenen Schritte sind dann und nur dann ausführbar, wenn die Ausdrücke (46') integrabel sind und $K_g = 1$ ist. Um die Bedingungen dafür aufzustellen, führe ich neben den in bezug auf A auch die in bezug auf G gebildeten Invarianten ein und unterscheide sie durch einen Strich ' von den ersteren. Da $Dg = K^2$, kann $T' = KT$ gewählt werden.

Zunächst folgt aus (46'), indem man für x links Kx, rechts $-{}^{cc}x$ einsetzt:

$$K^2(z_{(i)}\,, x) = (A\,, {}^{c}\bar{z}_{(i)}{}^{cc}x) = (G\,, \bar{z}_{(i)}{}^{c}x).$$

Von den Systemen $z_{(i)}, \bar{z}_{(i)}, A, G$ und C sind die mit *lateinischen* Buchstaben zu schreibenden Coefficienten von der speciellen Wahl von T unabhängig definiert. Daraus ergiebt sich, dass auch $(z_{(i)}, x) = \sum_\lambda z_{i,\lambda}\xi_\lambda$ T nicht enthält, während in $(G, \bar{z}_i{}^{c}x)$ T^2 im Nenner steht (cf. § 10 und 11). Daher lautet die letzte Gleichung, mit $T' = TK$ in Bezug auf G gebildet:

$$(46'') \qquad (z_{(i)}\,, x)' = (G\,, \bar{z}_{(i)}{}^{c}x)'.$$

Die Integrabilitätsbedingung von $z_{(i)}$ ist erfüllt, wenn $(\delta' z_{(i)}, x)$ eine symmetrische Form in x und du ist. Nun ist $\delta' G = 0$, also

$$(46''') \qquad (\delta' z_{(i)}\,, x)' = (G\,, \delta' \bar{z}_{(i)}{}^{c}x)' + (G\,, \bar{z}_{(i)}{}^{\delta' c}x)'.$$

Aus der Definitionsgleichung von G,

$$\sum (\bar{z}_{(i)}\,, x)^2 = (G\,, xx),$$

kann aber genau wie in § 27, Gl. (45, 45'), geschlossen werden, dass

$$(\delta' \bar{z}_{(i)}\,, x)' = -\zeta_i'(B\,, x\,du)'$$

sein muss, wenn

$$\zeta_1' = (\bar{z}_{(2)}, \bar{z}_{(3)})' = \frac{1}{K}(\bar{z}_{(2)}, \bar{z}_{(3)}) \quad \text{u. s. f. und} \quad (B, xdu)' = \sum_i d\zeta_i'(\bar{z}_{(i)}, x)'.$$

Nun ist nach (46)

$$(\bar{z}_{(2)}, \bar{z}_{(3)}) = ({}^{ca}z_{(2)}, {}^{ca}z_{(3)}) = K(z_{(2)}, z_{(3)}),$$

also allgemein $\zeta_i' = \zeta_i$, d. h. $B = G$ und

$$(\delta' \bar{z}_{(i)}, x)' = -\zeta_i(G, xdu)'.$$

Damit wird die erste Form der rechten Seite in (46‴) zu

$$-(\delta' \bar{z}_{(i)}, {}^{gc}x)' = \zeta_i(G, {}^{gc}x\,du)' = -\zeta_i(C, xdu)',$$

jedenfalls also symmetrisch in Bezug auf x und du, und es bleibt dieselbe Bedingung noch für $(G, \bar{z}_{(i)}{}^{\delta' c}x)' = -(\delta' C, {}^{g}\bar{z}_{(i)}x)'$ zu erfüllen. Da unter den drei Formen ${}^{g}\bar{z}_{(i)}$ zwei linear unabhängige sind, kann ein beliebiges System y für ${}^{g}\bar{z}_{(i)}$ gesetzt werden, so dass endlich die Integrabilität der Ausdrücke (46″) durch folgende Identität bedingt wird:

(G) $$(\delta_1' C, y d_2 u)' = (\delta_2' C, y d_1 u)'.$$

§ 29. Um K_g zu berechnen bringt man am besten die drei Formen A, C, G auf die gemeinsame Normalform. Man überzeugt sich leicht, dass dabei

$$A = p_{(1)}^2 + p_{(2)}^2, \qquad (p_{(1)}, p_{(2)}) = 1,$$
$$C = \lambda_1 p_{(1)}^2 + \lambda_2 p_{(2)}^2,$$
$$G = \lambda_1^2 p_{(1)}^2 + \lambda_2^2 p_{(2)}^2$$

wird. Es ist nämlich nach § 13

$$(A, C) = \lambda_1 + \lambda_2, \qquad K = \lambda_1 \lambda_2,$$

womit sich aus

$$G = (A, C)C - KA$$

der gewünschte Ausdruck für G ergiebt.

Setzt man noch

$$q_{(1)} = \lambda_1 p_{(1)}, \qquad q_{(2)} = \lambda_2 p_{(2)},$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{\mu_1}, \qquad \lambda_2 = \frac{1}{\mu_2},$$

so wird

$$G = q_{(1)}^2 + q_{(2)}^2, \quad (q_{(1)} q_{(2)})' = 1, \quad C = \mu_1 q_{(1)}^2 + \mu_2 q_{(2)}^2, \quad A = \mu_1^2 q_{(1)}^2 + \mu_2^2 q_{(2)}^2.$$

Die algebraische Beziehung zwischen den drei Formen A, C, G ist also symmetrisch in Bezug auf A und G.

Zunächst ergiebt sich, wenn (28′) auf $q_{(1)}, q_{(2)}$ angewandt wird, aus

$$(C, xy)' = \sum_{\rho=1}^{2} (p_{(\rho)}, y)'(q_{(\rho)}, x)':$$

$$(\delta' C, xy)' = \Big\{\sum_\rho (\delta' p_{(\rho)}, y)'(q_{(\rho)}, x)'\Big\} + (q_{(3)}, du)'\{(p_{(1)}, y)'(q_{(2)}, x)' - (p_{(2)}, y)'(q_{(1)}, x)'\},$$

also

$$(\delta_2' C, x d_1 u)' - (\delta_1' C, x d_2 u)' =$$

$$(d_1 u, d_2 u)'\Big[\Big\{\sum_\rho I' p_{(\rho)} . (q_{(\rho)}, x)'\Big\} + (p_{(1)}, q_{(3)})'(q_{(2)}, x)' - (p_{(2)}, q_{(3)})'(q_{(1)}, x)'\Big].$$

Da dieser Ausdruck nach (G) null ist, müssen die Coefficienten von $q_{(1)}$ und $q_{(2)}$ einzeln verschwinden. Beachtet man dabei, dass $p_{(\rho)} = \mu_\rho q_{(\rho)}$ und

$$(q_{(2)}, q_{(3)})' = I' q_{(1)}, \qquad (q_{(3)}, q_{(1)})' = I' q_{(2)}$$

ist, so kommt:

$$I' p_{(1)} = \mu_2 I' q_{(1)}, \qquad I' p_{(2)} = \mu_1 I' q_{(2)},$$

oder, da

(47) $$Ip = K . I' p \text{ ist:}$$

$$I p_{(1)} = \lambda_1 I' q_{(1)}, \qquad I p_{(2)} = \lambda_2 I' q_{(2)},$$

d. h. nach (28″) und (18′)

(G′) $$p_{(3)} = q_{(3)}.$$

Da diese Bedingung mit (G) gleichbedeutend, andererseits aber vollkommen symmetrisch in Bezug auf die Formen A und G ist, *gilt* (G) *auch, wenn die Operation δ' durch δ ersetzt wird. Die Formel* (G) *ist identisch mit den sogenannten Codazzischen Formeln.*

Nach (G′) ist nunmehr

$$Ip_{(3)} = Iq_{(3)},$$

d. h. nach (47):

$$K_a = K_g . K,$$ [1]

woraus sich, da $K_g = 1$ sein soll, die Gauss'sche Relation

$$K = K_a$$

ergiebt.

Damit erhält man folgenden Satz:

XVI. *Zu jedem Tripel von Funktionen* z_1, z_2, z_3, *welche die Bedingung*

$$dz_1^2 + dz_2^2 + dz_3^2 = (A\,,\,du du), \qquad (K_a \gtrless 0)$$

erfüllen, gehört eine symmetrische Form C, *welche den Relationen*

$$Dc = K_a,$$

$$(\partial_2 C\,,\,x d_1 u) - (\partial_1 C\,,\,x d_2 u) = 0$$

genügt, und umgekehrt. Die Bestimmung der dz_i *aus* A *und* C *erfordert die Integration einer totalen Riccatischen Differentialgleichung.*

X.

§ 30. Wenn man A auf zwei verschiedene Weisen als Summe dreier Quadrate dargestellt hat:

$$(A\,,\,xx) = \sum_i (a_{(i)}\,,\,x)^2 = \sum_\lambda (z_{(\lambda)}\,,\,x)^2,$$

so existiert ein und nur ein orthogonales System der Determinante $+1$, welches die Bedingungen

(48) $$z_{(\lambda)} = \sum_i a_{(i)} X_i^{(\lambda)}$$

erfüllt. Nach (44) muss dabei

$$X_i^{(\lambda)} = (A\,,\,a_{(i)} z_{(\lambda)}) + h_\lambda \alpha_i$$

---

[1] WEINGARTEN, Festschrift der techn. Hochschule zu Berlin, 1884; pag. 25, Gleich. 13.

und aus Symmetriegründen (weil auch $a_{(i)} = \sum_\lambda X_i^{(\lambda)} z_{(\lambda)}$ ist)

$$h_\lambda = h . \beta_\lambda$$

sein. Die Orthogonalitätsbedingungen reduzieren sich nach (42) und (43′) auf

$$h^2 = 1,$$

und man rechnet leicht nach, dass h der Wert der Determinante des Orthogonalsystems ist.

Umgekehrt folgt aus den Orthogonalitätsbedingungen wieder: $\sum z_{(\lambda)}^2 = \sum a_{(i)}^2$, so dass durch den Ansatz (48) die Forderung $\sum z_{(\lambda)}^2 = A$ in allgemeinster Weise identisch befriedigt ist. Damit führt das Deformationsproblem auf die Aufgabe, *alle orthogonalen Systeme zu bestimmen, für die die Formen* $z_{(\lambda)}$ *in* (48) *exakte Differentiale* dz_λ *werden.*

Die Integrabilitätsbedingungen der $z_{(\lambda)}$ werden unter Einführung der Formen $r_{(ik)}$ des siebenten Kapitels zu

$$Ia_{(i)} + \sum_k (a_{(k)}, r_{(ki)}) = 0, \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

oder ausgeschrieben:

$$(49) \quad Ia_{(1)} = (a_{(2)}, r_{(3)}) - (a_{(3)}, r_{(2)}); \qquad Ia_{(2)} = (a_{(3)}, r_{(1)}) - (a_{(1)}, r_{(3)});$$
$$Ia_{(3)} = (a_{(1)}, r_{(2)}) - (a_{(2)}, r_{(1)}).$$ [1]

Ausser diesen algebraischen Gleichungen unterliegen die Formen $r_{(i)}$ noch den Gleichungen (C′). Und umgekehrt, wenn drei Formen $r_{(i)}$ den Gleichungen (C′) und (49) genügen, so existieren orthogonale Systeme, die (36) erfüllen, und für alle diese Systeme sind die Formen

$$(z_{(\lambda)}, du) = \sum_i (a_{(i)}, du) X_i^{(\lambda)}$$

exakte Differentiale.

Ferner gilt folgender Satz:

XVII. *Kennt man von dem zu einer Lösung* $z_{(1)}, z_{(2)}, z_{(3)}$ *gehörigen Orthogonalsystem drei Grössen mit demselben unteren Index (etwa* 1), *und sind derselben von einander unabhängige Funktionen, so kennt man auch die übrigen Grössen des Systems und damit* $z_{(1)}, z_{(2)}$ *und* $z_{(3)}$ *selbst.*

[1] Cf. Darboux, Bd. I, Cap. VII.

Zunächst ist nämlich die Discriminante von

$$(G_1\,,\, du\,du) = \Sigma dX_1^{(\lambda)} dX_1^{(\lambda)} = (r_{(2)}\,,\, du)^2 + (r_{(3)}\,,\, du)^2$$

nicht null; daher giebt es unendlich viele Paare $g_{(2)}\,,\, g_{(3)}$ von *unabhängigen* Formen, für die

$$G_1 = g_{(2)}^2 + g_{(3)}^2.$$

Drückt man die $r_{(2)}\,,\, r_{(3)}$ durch ein specielles solches Paar linear aus, so bilden die Coefficienten wegen

$$r_{(2)}^2 + r_{(3)}^2 = g_{(2)}^2 + g_{(3)}^2$$

ein orthogonales System, so dass man

$$r_{(2)} = g_{(2)} \sin\varphi + g_{(3)} \cos\varphi; \qquad r_{(3)} = -g_{(2)} \cos\varphi + g_{(3)} \sin\varphi$$

setzen kann. Durch

$$Ia_{(1)} = (a_{(2)}\,,\, r_{(3)}) - (a_{(3)}\,,\, r_{(2)})$$

ist dann φ und damit $r_{(2)}$ und $r_{(3)}$ selbst zweideutig bestimmt. Nach (40′) findet man daraus unmittelbar die andern Reihen des Systems, w. z. b. w.

§ 31. Die Zweideutigkeit beschränkt sich auf das Vorzeichen der $r_{(i)}$, wenn $Ia_{(1)} = 0$ ist. Diese Thatsache führt auf zwei besonders einfache Specialisierungen, indem man entweder auch $Ia_{(2)}$ und $Ia_{(3)}$, oder aber $a_{(1)}$ selbst als identisch verschwindend annimmt. Im ersten Fall wäre in dem Tripel $a_{(1)}, a_{(2)}, a_{(3)}$ eine particuläre Lösung der Aufgabe von vornherein bekannt. Dies entspricht auch vollständig dem geometrischen Sinn des Deformationsproblems, bei dem es sich um die Biegungen einer »*gegebenen Fläche*» handelt. Da auch zugleich die Gleichungen (49) homogen werden, dürfte die Untersuchung dieses Falles vielleicht lohnend sein.

Unter der zweiten Annahme, dass eine der Formen $a_{(i)}$, — und zwar sei dies jetzt $a_{(3)}$ — identisch null sei, geht zwar die Symmetrie der Gleichungen (49) verloren, dafür aber bestimmen die beiden ersten,

$$Ia_{(1)} = (a_{(2)}\,,\, r_{(3)}), \qquad Ia_{(2)} = (r_{(3)}\,,\, a_{(1)}),$$

$r_{(3)}$ vollständig, und zwar ist $r_{(3)}$ dieselbe Form, die im IV^ten Capitel für $a_{(1)} = p_{(1)}$, $a_{(2)} = p_{(2)}$ mit $p_{(3)}$ bezeichnet war, also auch $Ir_{(3)} = K_a$.

Ist aber $r_{(3)}$ bekannt, so ist auch die zur Darstellung des orthogonalen Systems durch die Formeln (E) dienende Hülfsfunktion z als Funktion von u_1, u_2 definiert. Und zwar muss $z =$ const. das allgemeine Integral von $(r_{(3)}, du) = 0$ sein; aber z muss nicht die allgemeinste Funktion sein, die diese Bedingung erfüllt; denn die allgemeinste Funktion ist $\varphi(z)$, und diese liefert dasselbe orthogonale System, wie z.

Hat man für z eine specielle Wahl getroffen, so ist nach (E) das Quadrat σ des zu z gehörigen Multiplicators von $r_{(3)}$ gleich der in Bezug auf die Form $G_1 = \sum\limits_{\lambda} dX_1^{(\lambda)} dX_1^{(\lambda)}$ zu bildenden Invariante $\Delta_1 z$, vorausgesetzt, dass die Discriminante von G_1 nicht null ist.

Um die Formeln (E) anwenden zu können sei wieder der Fall $K_a = 0$ ausgeschlossen. Dann ist $r_{(3)}$ kein exaktes Differential und z und $\Delta_1 z = \sigma$ sind wohlbestimmte, unabhängige Funktionen $z(u_1, u_2)$, $\sigma(u_1, u_2)$ von u_1 und u_2. Daher sind die $X_1^{(\lambda)}$ auch Funktionen von z und σ, und umgekehrt sind z und σ Funtionen zweier der $X_1^{(\lambda)}$ oder überhaupt zweier unabhängiger Parameter x_1, x_2, durch die man die $X_1^{(\lambda)}$ so dargestellt hat, dass die Summe ihrer Quadrate identisch 1 ist. Dann gilt aber der Satz:

XVIII. *Kennt man z als Funktion von x_1, x_2, so kennt man das ganze orthogonale System und die zugehörige Lösung $z_{(1)}, z_{(2)}, z_{(3)}$.*

Man kennt nämlich G_1 in seiner Darstellung durch x_1, x_2, also mit z auch $\sigma = \Delta_1 z$ als Funktion von x_1, x_2. Damit kennt man, den funktionalen Zusammenhang zwischen den u und den x, d. h. man kennt die $X_1^{(\lambda)}$ und nach Satz XVII oder durch die Formeln (E) das ganze System.

§ 32. Es bleibt noch die Frage: *Wie darf z als Funktion von x_1, x_2 gewählt werden, damit es wirklich zu einer Lösung des Problems gehört?*

Die Darstellung des orthogonalen Systems durch (E) befriedigt die Orthogonalitätsbedingungen und die Gleichungen (C*) identisch. Durch die Annahme $z = z(u_1, u_2)$, $\Delta_1 z = \sigma(u_1, u_2)$ wurden die Gleichungen

$$Ia_{(1)} = (a_{(2)}, r_{(3)}), \qquad Ia_{(2)} = (r_{(3)}, a_{(1)})$$

erfüllt. Es bleibt also nur noch:

$$(49') \qquad (a_{(1)}, r_{(2)}) - (a_{(2)}, r_{(1)}) = 0.$$

Führt man in A z und σ als neue Veränderliche ein, so werde

$$(a_{(1)}, du) = a\,dz + \alpha\,d\sigma,$$

$$(a_{(2)}, du) = b\,dz + \beta\,d\sigma,$$

wo a, α, b, β bekannte Funktionen von z und σ sind. Dann lautet (49') ausgeschrieben und mit $\theta(z, \Delta_1 z)\sqrt{\Delta_1 z}$ multipliciert:

$$\text{(W)} \qquad a\Delta_1 z + \alpha\Delta(z, \Delta_1 z) - b\frac{\Delta_{12} z}{\sqrt{\Delta_1 z}} - 2\beta\Delta_{22} z\sqrt{\Delta_1 z} = 0,$$

worin die Invarianten aus der Form G_1 in x_1, x_2 gebildet sind und für σ überall $\Delta_1 z$ zu setzen ist. Hiermit folgt der Satz:

XIX. *Zu jedem Integral z der Differentialgleichung* (W), *für welches $\Delta_1 z$ eine von z unabhängige Funktion ist, gehört eine Lösung des Deformationsproblems, für die die Form G_1 des zugehörigen Orthogonalsystems eine nicht verschwindende Discriminante besitzt, und umgekehrt.*

Wenn also Lösungen des Problems existieren, für die die Discriminante von G_1 null ist, so werden sie durch die Integration der Differentialgleichung (W) *nicht* gefunden.

Die Differentialgleichung ist zuerst von Hrn. Weingarten in der Preisschrift aufgestellt worden. Sie lässt sich, wie Herr Weingarten ebenda gezeigt hat, für sämtliche bis jetzt bekannten Fälle, in denen das Deformationsproblem vollständig gelöst ist, nach bekannten Methoden integrieren, für das Rotationsparaboloid z. B. durch Zwischenintegrale.

§ 33. Herr Weingarten bezeichnet die Einführung der Variabeln z und σ in die quadratische Form A als *Reduktion* der Form. Das Kriterium, ob die Form $(a\,dz + \alpha\,d\sigma)^2 + (b\,dz + \beta\,d\sigma)^2$ reduziert ist, und ob zu der Zerlegung in zwei Quadrate die Form $(r_{(3)}, du) = -dz : \sqrt{\sigma}$ gehört, lautet

$$Ia_{(1)} = (a_{(2)}, r_{(3)}), \qquad Ia_{(2)} = (r_{(3)}, a_{(1)}),$$

oder ausgeschrieben:

$$(50) \qquad \frac{\partial a}{\partial \sigma} - \frac{\partial \alpha}{\partial z} = \frac{\beta}{\sqrt{\sigma}}; \qquad \frac{\partial b}{\partial \sigma} - \frac{\partial \beta}{\partial z} = -\frac{\alpha}{\sqrt{\sigma}}.$$

Das Kriterium, ob eine noch nicht in Quadrate zerlegte Form A redu-

ziert ist, d. h. ob in ihr $r_{(3)} = -\frac{dz}{\sqrt{\sigma}}$ gewählt werden darf, ist nach Satz XI:

$$Ir_{(3)} = K_a \quad \text{oder} \quad T.K_a = \frac{1}{2\sqrt{\sigma}^3}.$$

Die zugehörige Zerlegung ergiebt sich nach demselben Satz durch eine Quadratur.

Aus einer nicht reduzierten Form $(A, dudu)$ kann man durch eine Quadratur jederzeit eine reduzierte herstellen. Wählt man nämlich $r_{3,2} = 0$, d. h.

$$(r_{(3)}, du) = r_{3,1} du_1,$$

so wird wegen $Ir_{(3)} = K_a$

$$\frac{\partial r_{3,1}}{\partial u_2} = TK_a, \qquad r_{3,1} = \int TK_a du_2.$$

Führt man also

$$z = u_1, \qquad \sigma = \left(\int TK_a du_2\right)^{-2}$$

als neue Variable ein, so wird, wie verlangt, $r_{(3)}$ zu $-\frac{dz}{\sqrt{\sigma}}$, bei geeigneter Definition der Vorzeichens von $\sqrt{\sigma}$.

Diese Reduktion und Zerlegung einer gegebenen Form durch Quadraturen ist in der a. v. S. angeführten Arbeit des Hrn. WEINGARTEN in ausführlichster Weise dargestellt.

XI.

§ 34. Da durch die Integration der Differentialgleichung (W) diejenigen Lösungen des Problems, für die die Discriminante von G_1 verschwindet, nicht gefunden werden, so entsteht die Aufgabe, im gegebenen Falle zu entscheiden, ob solche Lösungen existieren, und, wenn dies der Fall ist, die zu ihrer Auffindung notwendigen Schritte anzugeben. Obgleich das Auftreten solcher Lösungen durchaus singulär ist, *kann man trotzdem für eine beliebige Form A die Reduktion und die Aufstellung der Differentialgleichung auf unendlich vielfache Weise so ausführen, dass eine beliebige, vorgeschriebene Lösung durch die Integration der Differentialgleichung*

nicht gefunden wird. Um dies einzusehen, bedient man sich am besten der geometrischen Anschauung.

Da $a_{(3)}$ identisch null ist, hat man nach (48) längs der Curven $(a_{(2)}, du) = 0$:

$$dz_1 : dz_2 : dz_3 = X_1^{(1)} : X_1^{(2)} : X_1^{(3)};$$

also sind die $X_1^{(\lambda)}$ die Richtungscosinus der Tangenten der Curven $(a_{(2)}, du) = 0$.

Wenn nun die Discriminante von $G_1 = r_{(2)}^2 + r_{(3)}^2$ null ist, so sind $r_{(2)}$ und $r_{(3)}$ abhängige Formen, d. h. $r_{(2)}$ ist durch $r_{(3)}$ teilbar. Das gleiche gilt von den $dX_1^{(\lambda)}$, da sie nach (40) lineare Verbindungen aus $r_{(2)}$ und $r_{(3)}$ sind. Längs der Curven $(r_{(3)}, du) = 0$ ist also $dX_1^{(\lambda)} = 0$, d. h.:

Ist die Discriminante von G_1 null, so sind die Tangenten der Curven $(a_{(2)}, du) = 0$ längs der Curven $(r_{(3)}, du) = 0$ einander parallel.

Die Curven $(r_{(3)}, du) = 0$ sind also Schattengrenzen der Fläche bei Beleuchtung aus unendlicher Entfernung und mögen kurz als *Streiflinien* der Fläche bezeichnet werden. Auf jeder Fläche nicht verschwindender Krümmung giebt es ∞^2 Streiflinien; jedem unendlich fernen Punkte entspricht eine, und längs einer jeden ist der Fläche ein Cylinder umschrieben.

Wählt man daher auf einer Fläche $\mathfrak{F}$ vom Linienelement $ds = \sqrt{(A, du\,du)}$ eine einfach unendliche Schaar Streiflinien, so umhüllen die erzeugenden Geraden der zugehörigen Cylinder eine Schaar von Curven der Fläche, etwa $(p, du) = 0$. Setzt man $(p, du) : \sqrt{A, pp} = (a_{(2)}, du)$, so ist

$$A = a_{(1)}^2 + a_{(2)}^2,$$

und die Discriminante von G_1 verschwindet, da die Cosinus der Tangenten der Curven $(a_{(2)}, du) = 0$ nur von dem Parameter der Streiflinien abhängen.

Bildet man also aus $a_{(1)}$ und $a_{(2)}$ $r_{(3)}$, bringt es auf die Form $dz : \sqrt{\sigma}$ (was ohne Integration ausführbar ist, wenn die Streiflinienschaar durch eine endliche Gleichung gegeben war) und stellt die Differentialgleichung für z auf, so liefert die Integration derselben die Fläche $\mathfrak{F}$ nicht, w. z. b. w.

Andererseits giebt es für jede Form[1] *A Differentialgleichungen* (W),

[1] sc. nicht verschwindender Krümmung.

die sämmtliche Lösungen des Problems liefern, d. h. es giebt auf jeder Fläche eine Schaar von Curven, die für keine Biegung der Fläche sämtlich Streiflinien werden.

Wählt man z. B. für $a_{(1)}$ ein exaktes Differential, so wird $Ia_{(1)} = 0$ und $r_{(3)}$ durch $a_{(2)}$ teilbar, d. h. die Curven $(a_{(2)}, du) = 0$ und $(r_{(3)}, du) = 0$ fallen zusammen. Sind aber die Tangenten der $a_{(2)}$-Curven längs dieser Curven selbst parallel, so sind die Curven Gerade, die Fläche ist geradlinig.

Bringt man also A — was immer möglich ist, — auf die Gestalt

$$dp^2 + Pdq^2,$$

wo P nicht von der Gestalt

$$\varphi(q)p^2 + \psi(q)p + \chi(q)$$

ist, so liefern die Formen

$$(a_{(1)}, du) = dp,$$

$$(a_{(2)}, du) = Pdq$$

eine Differentialgleichung (W), der keine Lösung des Problems entgeht.

§ 35. Wenn die Discriminante von G_1 null ist, ist $(r_{(2)}, r_{(3)}) = 0$. Im Kapitel VI war gezeigt, dass man dann im allgemeinen

$$(r_{(1)}, du) = dp, \quad (r_{(2)}, du) = \cos(p - p_0)dt, \quad (r_{(3)}, du) = -\sin(p - p_0)dt$$

setzen kann, wobei p_0 nur von t abhängt. Ist $z = \text{const.}$ wieder das allgemeine Integral von $r_{(3)} = 0$, $-\sqrt{\sigma}$ der zugehörige Multiplikator, dann ist t eine Funktion von z allein, ebenso p_0. Durch diese beiden ist p gegeben; es wird

$$\sin(p - p_0)\frac{dt}{dz} = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}, \tag{51}$$

also

$$p = p_0 + \arcsin\frac{1}{\tau\sqrt{\sigma}}, \tag{51'}$$

wenn $\frac{dt}{dz} = \tau$ gesetzt wird.

Es bleibt also zu entscheiden, ob zwei Funktionen p_0 und τ von z so bestimmt werden können, dass die Gleichung

$$(a_{(1)}, r_{(2)}) = (a_{(2)}, r_{(1)})$$

identisch erfüllt ist. Dieselbe wird unter Beachtung der Relationen

$$(r_{(1)}, du) = dp, \qquad r_{(2)} = -\operatorname{cotg}(p - p_0) r_{(3)}, \qquad (r_{(3)}, a_{(1)}) = Ia_{(2)}$$

zu

$$\operatorname{cotg}(p - p_0) Ia_{(2)} = \left(a_{(2)}, \frac{\partial p}{\partial u}\right), \tag{52}$$

und, wenn man A als reduzierte Form annimmt, $u_1 = z$, $u_2 = \sigma$ setzt und p nach (51, 51′) ausdrückt, zu

$$(\tau^2\sigma - 1)\left(\frac{\partial b}{\partial \sigma} - \frac{\partial \beta}{\partial z}\right) + \frac{b}{2\sigma} - \beta\frac{\tau'}{\tau} + \beta p_0' \sqrt{\sigma^2 - 1} = 0. \tag{P}$$

XX. *Dann und nur dann, wenn zwei Funktionen* τ *und* p_0' *von* z *allein der Gleichung* (P) *genügen, liefert die Differentialgleichung* (W) *nicht sämmtliche Lösungen des Deformationsproblems.*

Die Entscheidung, ob solche Funktionen existieren, wie auch die Bestimmung von p_0' und τ erfordert in jedem einzelnen Fall eine endliche Anzahl von Operationen und ist jederzeit ausführbar. Hat man p_0' und τ, so sind die $r_{(i)}$ bekannt, und die Bestimmung des orthogonalen Systems führt auf die Integration der Riccatischen Gleichung in Kap. VII. Dieselbe wird, wenn man

$$x = e^{(\eta + p)i}$$

setzt, zu

$$\frac{d\eta}{dt} = -i \sin(\eta + p_0),$$

d. h. die Bestimmung derjenigen Lösungen, welche bei der Integration der Gleichung (W) verloren gehen, erfordert die Integration einer *gewöhnlichen* Differentialgleichung erster Ordnung.

Nach Kap. VI kann auch

$$r_{(1)} = dp, \qquad r_{(2)} = e^{ip} dt, \qquad r_{(3)} = ie^{ip} dt$$

gesetzt werden.

Dann wird:

$$ie^{pi} = -\frac{1}{\tau\sqrt{\sigma}},$$

und für (49′) kommt:

$$Ia_{(2)} + e^{ip}\left(a_{(2)}, \frac{\partial pi}{\partial u}\right) = 0$$

oder nach (24):

$$(\mathrm{P}^*) \qquad I\left(\frac{a_{(2)}}{\tau\sqrt{\sigma}}\right) = 0,$$

d. h. es muss $\frac{a_{(2)}}{\sqrt{\sigma}}$ einen Multiplikator besitzen, der nur von z abhängig ist. Die zugehörige Riccatische Differentialgleichung wird zu $\frac{d\eta}{dt} = e^{-i\eta}$ für $x = e^{(\eta+p)i}$ und gestattet die Bestimmung der (offenbar imaginären) Flächen ohne weiteres.

Es sei noch bemerkt, dass man durch Quadraturen beliebig viele Beispiele solcher singulären Differentialgleichungen (W) herstellen kann. Wählt man nämlich β, τ und p_0 beliebig, so ergiebt sich b aus (P) durch eine Quadratur. Denn man kann (52) auch so schreiben:

$$I(\cos(w - w_0)\,a_{(2)}) = \left(a_{(2)}\frac{\partial p_0}{\partial u}\right)\sin(w - w_0),$$

und da $\frac{\partial p_0}{\partial \sigma} = 0$, ergiebt sich daraus:

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}(b\cos(p - p_0)) = \frac{\partial}{\partial z}(\beta\cos(p - p_0)) - \beta\sin(p - p_0)\frac{\partial p_0}{\partial z}.$$

Aus b und β findet man nach (50) α und durch eine zweite Quadratur a.

XII.

§ 36. Zur Erläuterung des Vorstehenden mögen kurz einige bekannte Sätze über Rotationsflächen abgeleitet werden. Sei

$$du^2 + P^2dv^2$$

das Quadrat des Linienelementes einer Rotationsfläche, also P eine Funktion von u allein. Wählt man

$$a_{(1)} = P dv, \qquad a_{(2)} = du,$$

so wird

$$r_{(8)} = -\frac{dP}{du}dv;$$

also kann $z = v$, $\sigma = \left(\frac{du}{dP}\right)^2$ gesetzt werden, und man erhält:

$$A = Pdz^2 + \sigma dP^2 = Pdz^2 + \sigma P'^2 d\sigma^2,$$

wo P jetzt als Funktion von σ aufzufassen und $P' = \frac{dP}{d\sigma}$ ist. Dadurch wird

(53) $$a_{(1)} = Pdz, \qquad a_{(2)} = \sqrt{\sigma} P' d\sigma$$

d. h. $a = P, \qquad \alpha = 0, \qquad b = 0, \qquad \beta = \sqrt{\sigma} P',$

und für (W) kommt:

(R) $$\Delta_{22} z = \varphi(\sigma) = \varphi(\Delta_1 z),$$

wobei

$$\varphi(\sigma) = \frac{P}{2P'}, \quad \text{also} \quad P = ce^{\frac{1}{2}\int \frac{d\sigma}{\varphi(\sigma)}} \text{ ist.}$$

φ ist mithin nicht identisch null, sonst aber ganz beliebig.

Zunächst überzeugt man sich leicht, *dass die Differentialgleichung* (R) *Integrale besitzen kann, die mit dem Deformationsproblem nichts zu thun haben.* Denn wenn $\varphi(\sigma)$ für $\sigma = \sigma_0$ verschwindet, so genügt jedes Integral von

$$\Delta_1 z = \sigma_0$$

auch (R), während doch $\Delta_1 z$ keine von z unabhängige Funktion, vielmehr eine Constante σ_0 ist.

Zweitens gehen bei der Integration der Differentialgleichung Flächen verloren. (P) wird nämlich zu

$$\tau' = \tau p_0' \sqrt{\tau^2 \sigma - 1},$$

was für $\tau' = 0$, $p_0' = 0$ möglich ist. p_0 kann unbeschadet der Allgemeinheit gleich null angenommen werden, dagegen ist τ von null verschieden. Die Integration der zu den Formen

$$r_{(1)} = dp, \qquad r_{(2)} = \cos p\, dt, \qquad r_{(3)} = -\sin p\, dt$$

gehörigen Riccatischen Differentialgleichung kann man vermeiden. Es wird

$$G_3 = dp^2 + \cos^2 p\, dt^2,$$

so dass

(54) $$X_3^{(1)} = \cos p \cos t, \qquad X_3^{(2)} = \cos p \sin t, \qquad X_3^{(3)} = \sin p$$

gesetzt werden kann. Für die andern findet man aus $dX_3^{(\lambda)} = X_1^{(\lambda)} r_{(2)} - X_2^{(\lambda)} r_{(1)}$:

$$X_1^{(1)} = -\sin t, \qquad X_2^{(1)} = \sin p \cos t,$$
$$X_1^{(2)} = \cos t, \qquad X_2^{(2)} = \sin p \sin t,$$
$$X_1^{(3)} = 0, \qquad X_2^{(3)} = -\cos p.$$

Beachtet man noch, dass $\sin p = 1 : \tau\sqrt{\sigma}$, $\tau = \text{const.}$, so erhält man für die z_λ:

$$z_1 = \frac{P}{\tau}\cos t, \qquad z_2 = \frac{P}{\tau}\sin t, \qquad z_3 = f\left(\frac{P}{\tau}\right) = \int \sqrt{\tau^2\sigma - 1}\,\frac{P'}{\tau}\,d\sigma,$$

also werden die zu $du^2 + P^2dv^2$ *gehörigen Rotationsflächen durch* (R) *nicht gefunden.*

§ 37. Stellt man die $X_1^{(\lambda)}$ durch die Formeln (54) dar, schreibt aber x und y für p und t, so wird

$$G_1 = dx^2 + \cos^2 x\,dy^2.$$

Für diese Wahl von G_1 besitzt (R), wie leicht nachzuweisen, das particuläre Integral von der Form $\varphi(x) + \psi(y)$:

$$z = cy + \int \sqrt{\sigma - \frac{c^2}{\cos^2 x}}\,dx,$$

wobei σ durch die Gleichung

$$P(\sigma) = e^{\frac{1}{2}\int\frac{d\sigma}{\varphi(\sigma)}} = \frac{m}{\sin x}, \qquad m = \text{const.}$$

als Funktion von x allein gegeben ist.

Man erhält aus diesem Integral die Schraubenflächen mit der z_3 Achse als Drehungsachse:

$$z_1 = r\cos\varphi, \qquad z_2 = r\sin\varphi, \qquad z_3 = f(r) + g\varphi,$$

wo

$$r = \sqrt{P^2c^2 - m^2c^2}; \qquad \varphi = y - \frac{\pi}{2}; \qquad g = mc;$$

$$f(r) = \int \sqrt{r^2\frac{\sigma}{c^2} - g^2 - r^2}\,\frac{dr}{r}.$$

§ 38. Wählt man als Gleichung der Rotationsfläche

$$z_3 = ic\log\sqrt{z_1^2 + z_2^2},$$

so wird (R) zu:

$$\Delta_{22} z = 1 - \Delta_1 z.$$

Dies ist die Gleichung (F) des VIII[ten] Kapitels für $K = 1$. Daraus folgt der aus der Theorie der Weingartenschen Flächen bekannte Satz:

Kennt man alle Biegungen der Rotationsfläche der logarithmischen Linie, so findet man durch Quadraturen alle Flächen constanter Krümmung, und umgekehrt.

§ 39. In seinen Untersuchungen über die Flächen, zwischen deren Hauptkrümmungen eine Gleichung besteht, hat Hr. Weingarten gezeigt, dass das Deformationsproblem der Rotationsflächen äquivalent ist mit der Aufgabe, alle Formen der Krümmung 1 von der Gestalt:

$$p dz^2 + \varphi(p) dq^2 = (G_1, dx dx)$$

zu finden. Setzt man nämlich statt (53):

$$a_{(2)} = P dz, \qquad a_{(1)} = -\sqrt{\sigma}\, P' d\sigma,$$

so wird (W) zu

$$P' \Delta_1 z \Delta(z, \Delta_1 z) + P \Delta_{12} z = 0,$$

und wenn man Δ_{12} nach (32) ausdrückt, zu:

$$\Delta_2 z = \left(\frac{P'}{P} - \frac{1}{2\sigma}\right) \Delta(z, \Delta_1 z) = 0.$$

Für $dz = (r, dx)$ ist nach der Formel für $\Delta_2 z$ in § 18 $\Delta_2 z = I({}^{g}r)$, mithin:

$$\frac{P}{\sqrt{\sigma}} . I({}^{g}r) + \left({}^{g}r, \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{P}{\sqrt{\sigma}}\right) = 0.$$

Nach (24) ist also $\frac{P}{\sqrt{\sigma}}$ ein Multiplikator von ${}^{g}r$, d. h. es ist

$$({}^{g}r, dx) = \frac{\sqrt{\sigma}\, dq}{P}$$

und

$$(G_1, dx dx) = \frac{(r, dx)^2 + ({}^{g}r, dx)^2}{(G, rr)} = \frac{dz^2}{\sigma} + \frac{dq^2}{P^2},$$

also von der verlangten Gestalt.